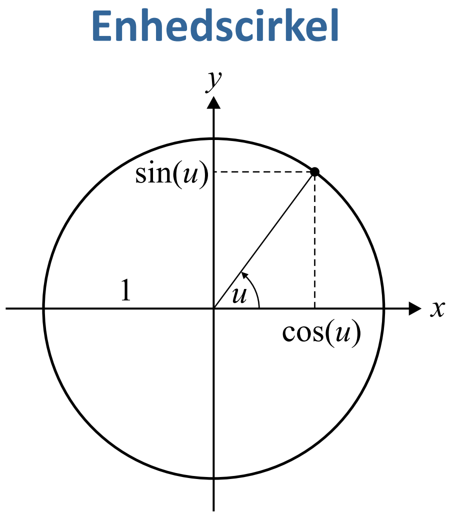
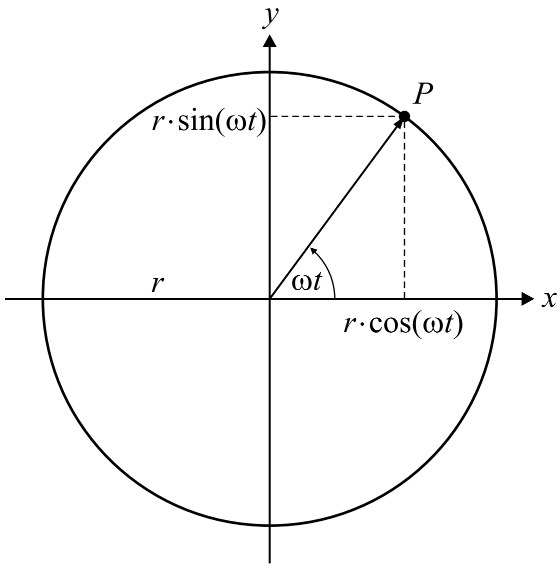
Jævn cirkelbevægelse

I dette tillæg skal vi se på den matematiske repræsentation af en jævn cirkelbevægelse i fysik. Med en *jævn cirkelbevægelse* menes en bevægelse, hvor en genstand bevæger sig rundt i en cirkel med en given radius og med konstant fart. Vi tager udgangspunkt i en enhedscirkel. Fra matematikundervisningen er det velkendt, at koordinaterne til retningspunktet for en vinkel u, regnet fra den positive del af x-aksen, er $(\cos(u), \sin(u))$.





Men nu skal vi jo have en tid t ind i billedet, da der er tale om en bevægelse. Det er i den forbindelse nærliggende at antage, at hvis man lader vinklen u være proportional med tiden, så bliver bevægelsen med konstant fart. Vi skal snart se, at det er rigtigt. Proportionalitetsfaktoren kalder vi ω, så $u = \omega \cdot t$. Lad os desuden antage, at bevægelsen ikke skal foregå i en enhedscirkel, men i en cirkel med radius r. Derfor ganger vi begge koordinater med r. Lad os betragte bevægelsen:

(1)
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega t) \\ r \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Hastigheden fås som bekendt ved at differentiere *stedfunktionen*. Vi differentierer derfor hver koordinatfunktion for sig og får derved *hastighedsfunktionen*:

(2)
$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \\ r \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix} = r \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

hvor vi blandt andet har benyttet reglerne for differentiation af en sammensat funktion (Overvej!). Bemærk, at der er forskel på begreberne hastighed og fart. Sidstnævnte er defineret som størrelsen af hastighedsvektoren, dvs. den er et *tal*, ikke en vektor! Vi betegner den med $v(t)$ uden vektorpil. Vi får følgende værdi for farten:

(3)
$$\begin{aligned} v(t) = |\vec{v}(t)| &= \left| r \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \right| = r \cdot \omega \cdot \left| \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \right| \\ &= r \cdot \omega \cdot \sqrt{(-\sin(\omega t))^2 + (\cos(\omega t))^2} = r \cdot \omega \cdot \sqrt{(\sin(\omega t))^2 + (\cos(\omega t))^2} = r \cdot \omega \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet ”idiotformlen”. Vi ser at farten er konstant: $v = r \cdot \omega$, hvor vi undertrykker tiden *t*. Vi fortsætter med at differentiere for at finde *accelerationsfunktionen*:

$$\text{(4)} \qquad \vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = r \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}' = r \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\omega \cdot \cos(\omega t) \\ -\omega \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -r \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

hvor vi igen har benyttet reglen for differentiation af sammensat funktion. Tilsvarende som for hastigheden, vil vi også kigge på accelerationens størrelse:

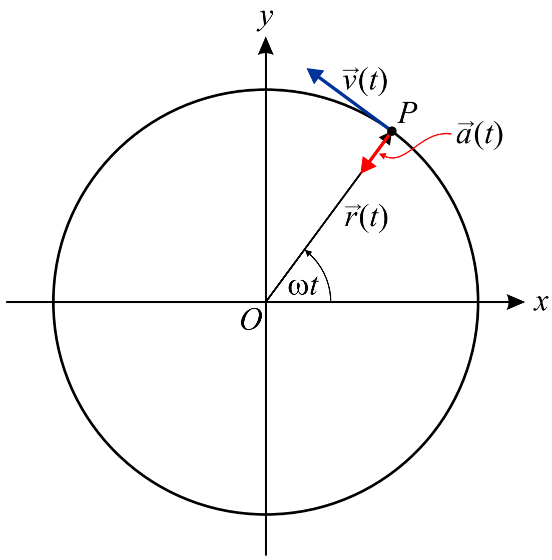
$$\text{(5)} \qquad a(t) = |\vec{a}(t)| = \left| -r \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \right| = r \cdot \omega^2 \cdot \left| \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \right| = r \cdot \omega^2$$

Her har vi benyttet, at vi ved at længden af vektoren $(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ er 1. Punktet ligger jo på enhedscirklen! Ligningen (5) udtrykker altså at accelerationens størrelse er konstant lig med $r \cdot \omega^2$. Ofte vil vi undertrykke tiden *t* og bare skrive $a = r \cdot \omega^2$. Det skal lige nævnes, at ω kaldes for *vinkelhastigheden*. Det er meget naturligt, da den angiver, hvor mange radianer partiklen flytter sig pr. sekund (Overvej!). Regnet i radianer er der vinklen 2π for én runde. Derfor kan vi finde *omløbstiden T* ved at løse følgende ligning: $\omega \cdot T = 2\pi$, hvilket giver $T = 2\pi/\omega$. Vi har dermed følgende sæt af formler, hvoraf én er udledt ved sammensætning:

Formler for en jævn cirkelbevægelse

a) $v = r \cdot \omega$ b) $a = r \cdot \omega^2 = \dfrac{v^2}{r}$ c) $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Vi mangler lige at kigge på retningen af både hastighedsvektoren og accelerationsvektoren til tidspunktet *t*. Her bemærkes det, at vektoren i sidste udtryk i (2) er proportional med tværvektoren til stedvektoren i (1) (Overvej!). Det betyder, at hastigheden er tangent til cirklen, hvilket ikke er overraskende. Men hvad der er mere overraskende er, at accelerationsvektoren er parallel med, men *modsat rettet* stedvektoren. Dette ses direkte af udtrykket (4). Vi kan nu tegne situationen ind på en figur:



En jævn cirkelbevægelse "kræver" altså en acceleration, som er konstant i størrelse og rettet ind mod centrum af cirklen. I fysisk henseende kan det ske ved, at der virker en kraft af konstant størrelse ind mod centrum af cirklen. Man taler om henholdsvis en *centripetalkraft* og en *centripetalacceleration*.

Opgaver

Opgave 1

Gennemgå de enkelte skridt i udledningerne ovenfor. Hvilke regler for differentiation er benyttet undervejs?

Opgave 2

a) Hvor i koordinatsystemet er partiklen til tidspunktet 0? Kald punktet P_0.
b) Hvis man vil have partiklen til at starte i punktet P_0 til et andet tidspunkt t_0, hvad skal så ændres i stedfunktionen? Man taler her om, at der er en *faseforskydning*.
c) Hvad skal ændres i stedfunktionen, hvis man ønsker partiklen ikke skal foretage en cirkulær bevægelse med centrum i $(0,0)$ i koordinatsystemet, men derimod omkring et andet punkt (x_0, y_0)?

Opgave 3

En partikel bevæger sig med farten 20 m/s rundt i en cirkel med radius 30 m i positiv omløbsretning. Til tidspunktet $t=0$ er den i $P_0=(30,0)$, underforstået i enheden meter.

a) Opskriv et udtryk for bevægelsens stedfunktion. *Hjælp*: Du skal først finde ω.
b) Opskriv desuden udtryk for hastigheds- og accelerationsfunktionen.
c) Bestem accelerationens størrelse.
d) Antag partiklen vejer 5 kg. Hvor stor en centripetalkraft skal da til for at holde partiklen i banen?
e) Bestem omløbstiden.

Opgave 4 (Løs opgave)

Jorden beskriver som bekendt en *ellipsebane* rundt om Solen, men denne ellipsebane er meget tæt på at være en cirkel! Overvej nogle ting, der kunne være sjove at checke i den sammenhæng.

Opgave 5

Ovenfor har vi talt om en *jævn* cirkelbevægelse. Overvej hvordan man kan ændre i forskriften (1), så cirkelbevægelsen bliver "ujævn".