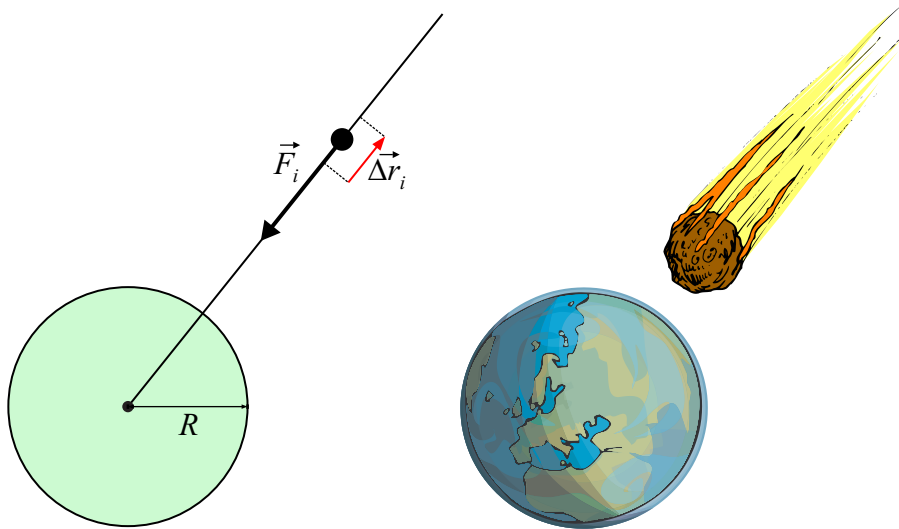


Gravitationsfeltet

Den store britiske fysiker Isaac Newton opdagede i 1600-tallet massetiltrækningsloven, som siger, at to masser m og M i den indbyrdes afstand r påvirker hinanden med en kraft af følgende størrelse, hvor G er *gravitationskonstanten*:

$$(1) \quad F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Når der er tale om to masser med en udstrækning, er situationen den samme, som hvis massen af hver af de to objekters masse var koncentreret i det pågældende objekts *tyngdepunkt*. På figuren nedenfor ses et meteor, som kommer ind i Jordens tyngdefelt og har retning direkte mod Jordens centrum.



Lad os beregne et udtryk for det arbejde, som gravitationskraften udfører på meteoret, når meteoret bevæger sig fra en afstand r_1 til en afstand r_2 fra Jordens centrum. Vi har tidligere lært, at det *arbejde*, som en kraft udfører på et legeme er lig med $F \cdot s \cdot \cos(\theta)$, hvor F er kraftens størrelse, s er den tilbagelagte strækning og θ er vinklen imellem ”kraft og vej”. Her er kraft og vej ensrettede, dvs. vinklen θ er 0, hvorved arbejdet blot er $F \cdot s$. Der er imidlertid en komplikation: Kraften er ikke den samme hele vejen; faktisk bliver den større og større jo nærmere meteoret kommer Jorden. Derfor er man nødt til at dele problemet op i små vejstykker, hvor kraften kan regnes ca. konstant.

$$(2) \quad A_{\text{gravitation}} \approx \sum_i F_i \cdot (-\Delta r_i) = - \sum_i F_i \cdot \Delta r_i$$

Bemærk, at vi her har placeret et minus foran Δr_i . Det er fordi r regnes positiv udefter, og for at vejlængden bliver positiv må der anbringes et minus foran! Lader man længden af de små vejlængder gå mod 0, så får man et integral, og sjovt nok ender man med et eksakt udtryk for gravitationskraftens arbejde.

$$(3) \quad A_{\text{gravitation}} = - \int_{r_1}^{r_2} F(r) \cdot dr$$

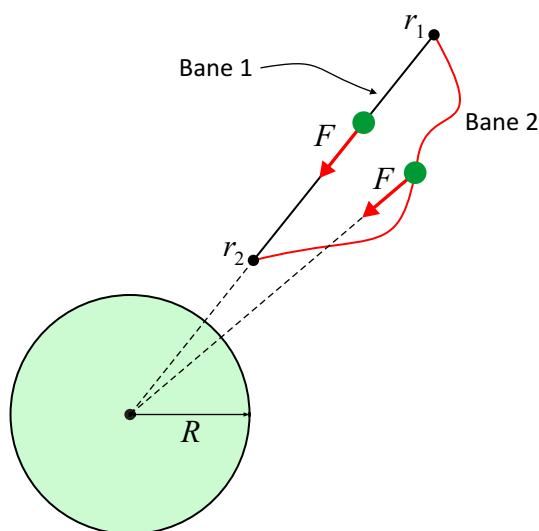
hvor det i integranden er fremhævet at kraften er en kraft, som afhænger af afstanden r til Jordens centrum. I det følgende indsætter vi udtrykket for gravitationskraften (1) i integralet (3):

$$\begin{aligned}
 A_{\text{gravitation}} &= - \int_{r_1}^{r_2} F(r) \cdot dr \\
 &= - \int_{r_1}^{r_2} G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot dr \\
 &= - G \cdot m \cdot M \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \cdot dr \\
 &= - G \cdot m \cdot M \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr \\
 (4) \quad &= - G \cdot m \cdot M \cdot \left[\frac{1}{-2+1} r^{-2+1} \right]_{r_1}^{r_2} \\
 &= - G \cdot m \cdot M \cdot \left[-r^{-1} \right]_{r_1}^{r_2} \\
 &= - G \cdot m \cdot M \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \\
 &= - G \cdot m \cdot M \cdot \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) \\
 &= - \left(-G \cdot \frac{m \cdot M}{r_2} \right) + \left(-G \cdot \frac{m \cdot M}{r_1} \right)
 \end{aligned}$$

I det 3. lighedstegn har vi benyttet at gravitationskonstanten G , meteorets masse m og Jordens masse M er konstanter og derfor kan sættes udenfor integralet. I 4. lighedstegn omskriver vi brøken, så vi tydeligt kan se, at vi skal integrere en potensfunktion. Vi ved, at en potensfunktion x^a har stamfunktionen $\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$. Det udnyttes i de næste linjer.

□

Ovenfor har vi udregnet et udtryk for kraftens arbejde, når meteoret bevæger sig i en direkte linje mod Jordens centrum fra en afstand r_1 til en afstand r_2 fra denne. Man kan imidlertid vise, at *gravitationskraftens arbejde er uafhængig af vejen*. Det betyder at ligegyldig hvilken kurve meteoret bevæger sig ad mellem to punkter, så vil der ikke være nogen forskel i det arbejde gravitationskraften udfører. Betragt figuren på næste side. Påstanden kan virke overraskende, fordi den krumme bane 2 på figuren er meget længere end den korte direkte bane 1. Sagen er imidlertid, at der langs bane 2 vil være en vinkel mellem kraft og vej, som det også er vist på figuren. Vi har altså igen fat i formlen $F \cdot s \cdot \cos(\theta)$, som skal bruges på hvert lille banelement. Så selv om bane 2 er længere end bane 1, så vil de små bidrag til arbejdet langs bane 2 blive ganget op med en cosinus-faktor. At det ender med at give præcist det samme totale arbejde er for svært til at blive vist her.

**Definition 1**

En kraft, som har den egenskab at kraftens arbejde er *uafhængig af vejen* kaldes for en *konservativ kraft*.

Resultatet i udregning (4) samt egenskaben at gravitationskraften er en konservativ kraft kan få én til at få den idé at indføre en *potentiell energi* i tyngdefeltet:

Definition 2 (Potentiell energi i Jordens tyngdefelt)

Den *potentielle energi* for et legeme med massen m , som befinder sig i Jordens tyngdefelt i afstanden r fra Jordens centrum, defineres ved

$$(5) \quad E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Med denne definition bliver (4) til følgende:

$$(6) \quad A_{\text{gravitation}} = -E_{\text{pot},2} + E_{\text{pot},1} = -\Delta E_{\text{pot}}$$

Dermed kan gravitationskraftens arbejde, når et legeme bevæger sig fra et punkt P_1 til et punkt P_2 , altid udregnes ved blot at trække den potentielle energi i punktet P_2 fra den potentielle energi i punktet P_1 , uanset hvilken bane legemet bevæger sig ad! Nu gælder også den såkaldte *arbejdssætning*, som siger at den resulterende krafts arbejde er lig med tilvæksten i kinetisk energi. Vi vil ikke vise den i det generelle tilfælde her. I tilfældet med gravitationskraften, har den følgende udseende:

$$(7) \quad A_{\text{gravitation}} = \Delta E_{\text{kin}}$$

Ligningerne (6) og (7) viser to udtryk for $A_{\text{gravitation}}$. De kan sættes lig med hinanden:

$$(8) \quad -\Delta E_{\text{pot}} = \Delta E_{\text{kin}} \Leftrightarrow \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = 0 \Leftrightarrow E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konstant}$$

Vi er nu nået frem til det vi kender vældig godt for det simple tilfælde nær Jordens overflade. Her er som bekendt den mekaniske energi bevaret: $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{konstant}$. Men noget tilsvarende gælder altså også i tyngdefeltet, når vi er ude i rummet.

Mekanisk energi i tyngdefeltet 3

Den mekaniske energi i tyngdefeltet er bevaret, dvs.

$$(9) \quad E_{\text{mek}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{r} = \text{konstant}$$

Bemærkning 4

Af udtrykket for den potentielle energi i definition 2 ser vi at den er *negativ*. Hvis man lader afstanden gå mod uendelig, ser vi, at den potentielle energi går mod 0:

$$(10) \quad E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r} \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad r \rightarrow \infty$$

Man kan lidt løst sige, at nulpunktet for den potentielle energi er i det *uendeligt fjerne*.

Eksempel 5 (Escape-hastigheden)

Et godt eksempel på brug af den mekaniske energi i tyngdefeltet er til at bestemme den såkaldte *escape-hastighed* eller på dansk *undvigelseshastigheden* for en raket på Jorden. Spørgsmålet er hvor stor fart raketten skal have på fra start for at kunne undslippe Jordens tyngdefelt og i princippet have nok energi til at komme helt ud i det uendelige. I det uendeligt fjerne er den potentielle energi ifølge bemærkning 4 lig med 0. Det er desuden nok, hvis raketten derude har en fart på 0. Raketten energi i det uendeligt fjerne skal altså være mindst $0 + 0 = 0$, underforstået Joule. Derfor skal den mekaniske energi, da den er besvaret, også være 0 i det øjeblik, hvor raketten forlader Jordoverfladen. Her er $r = R$, Jordens radius. Vi kan opstille følgende ligning:

$$\begin{aligned} E_{\text{mek}} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = G \cdot \frac{m \cdot M}{R} \\ \Leftrightarrow v^2 &= \frac{2 \cdot G \cdot M}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} \end{aligned}$$

Indsættes $R = 6371 \text{ km}$, $M = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ og $G = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, fås følgende værdi for escape-hastigheden: $v = 11188 \text{ m/s}$. På vej ud i rummet vil raketten få højere og højere potentiel energi og tilsvarende lavere kinetisk energi. Så farten vil altså aftage udefter.

Den potentielle energi kan opfattes som en slags *opsparet energi*. Hvis et legeme fra starten befinder sig i ro et sted i Jordens tyngdefelt, så vil det blive accelereret ind mod Jorden, hvis det slippes. Herved vil en del af legemets opsparede potentielle energi blive omsat til kinetisk energi.

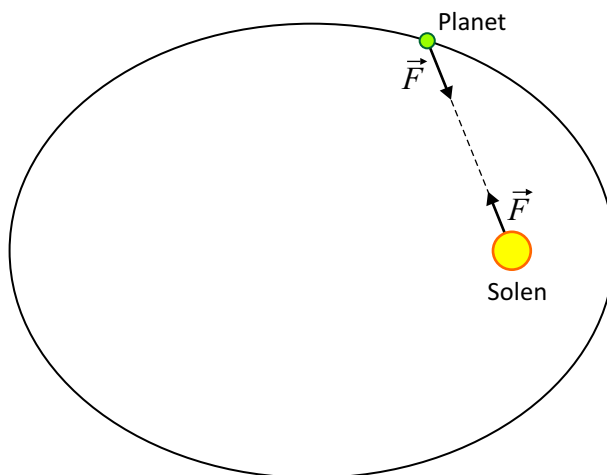
Bemærkning 6

I dette afsnit har vi kigget på tiltrækningen mellem to legemer og ladet som om det udelukkende er meteoret der bevæger sig og ikke Jorden. Det er da også en super god approksimation, fordi Jordens masse er så meget større end meteorets. Hvis der var tale om et legeme med en masse, som blot var lidt mindre end Jordens, så ville Jorden også bevæge sig mærkbart. I så fald skal man til at kigge på systemets tyngdepunkt. Det ligger udenfor denne notes hensigt.

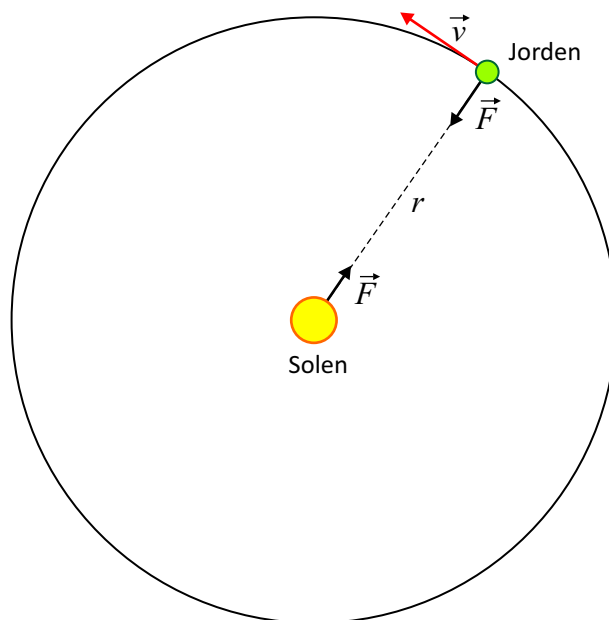
Bevægelser i solsystemet

Vi har ovenfor udelukkende fokuseret på Jordens tyngdefelt, som om det kun er det pågældende himmellegeme og så Jorden, der trækker i hinanden. I praksis vil der ofte være flere himmellegemer, der skal tages hensyn til, afhængigt af hvor store deres masser er, og hvor langt borte de er. Når eksperter regner på bevægelserne af himmellegemerne i vort solsystem, så er de nødt til at regne på et *trelegemeproblem* eller et *mangelegemeproblem* for at få nøjagtige forudsigelser.

For Jordens bevægelse om Solen kan vi som en grov model godt antage, at der kun findes Jorden og Solen, og at det er Jorden, som bevæger sig rundt om Solen samt at Solen i øvrigt er upåvirket. Ifølge Keplers 1. lov bevæger planeterne sig omkring Solen i en *ellipsebane* med Solen i det ene brændpunkt. Ved hjælp af gravitationsloven (1) var Newton i stand til at udlede dette teoretisk. Det skal vi naturligvis ikke gøre her, blot overveje nogle få ting. Figuren viser, hvordan de to objekter påvirker hinanden med den *centrale* gravitationskraft. Hvis planeten ikke havde haft fart på til siden, så ville den have foretaget et direkte styrt ned mod Solen.



Heldigvis har planeten denne fart rundt i banen. Hvis man lægger den kinetiske energi sammen med den potentielle energi, så vil man få et negativt tal. Der gælder nemlig den regel, at objekter, der bevæger sig i en ellipsebane omkring Solen har en negativ mekanisk energi: $E_{\text{mek}} < 0$. Bevægelsen er *bundet*. Derimod er objekter, der beskriver en *parabelbane* eller en *hyperbelbane*, karakteriseret ved henholdsvis en mekanisk energi på 0 og en positiv mekanisk energi. I begge de sidstnævnte tilfælde vil objektet kun komme ind omkring Solen en enkelt gang, før det igen vil forsvinde for stedse! Det er *ubundne bevægelser*. Tilbage til planeterne med deres ellipsebaner. For dem postulerede Kepler i sin 2. lov, at de *overstryger lige store arealer i lige store tidsrum (arealhastigheden er konstant)*. Det har umiddelbart som konsekvens, at planeten bevæger sig hurtigere, når den er tættere på Solen. Dernæst er der Keplers 3. lov, som udtrykker en sammenhæng mellem omløbstiden T og middelfaststanden a til Solen: $T^2/a^3 = \text{konstant}$. Med denne lov kan man blandt andet forudsige, at planeter, der ligger længere fra Solen, har en større omløbstid.



Jorden bevæger sig omtrent i en jævn cirkelbevægelse omkring Solen. Ellipsen er altså næsten en cirkel. Det betyder, at vi i en tilnærmelse kan benytte formlerne for *jævn cirkelbevægelse*. Her gælder blandt andet følgende formel for accelerationen $a = v^2/r$ og følgende formel for hastigheden: $v = 2 \cdot \pi \cdot r / T$. Den resulterende kraft på Jorden er gravitationskraften (1), hvor M dog her skal stå for Solens masse og m for Jordens masse! Ifølge Newtons 2. lov er $F_{\text{res}} = m \cdot a$. Det giver følgende:

$$(11) \quad m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot a = F_{\text{res}} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Hvis man dividerer på begge sider med m og ganger med r og endelig tager kvadratroden på begge sider af lighedstegnet, fås:

$$(12) \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Vi ser, at hastigheden af Jorden *ikke* afhænger af Jordens masse, men kun af Solens!

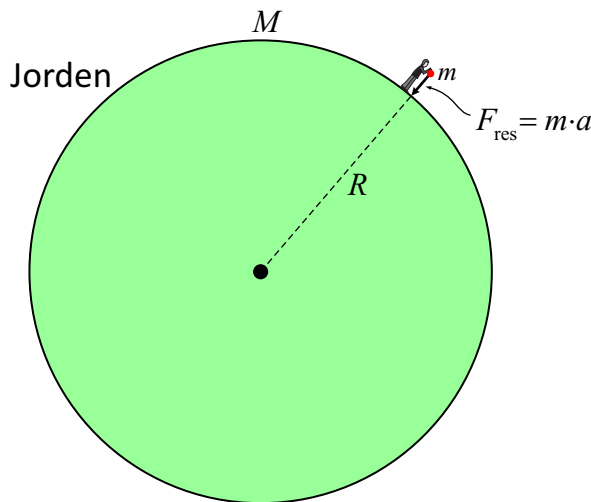
Vi har nu to udtryk for hastigheden. Dem kan vi sætte lig med hinanden:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} &= \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \\
 \Updownarrow \\
 \frac{G \cdot M}{r} &= \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{T^2} \\
 \Updownarrow \\
 \frac{T^2}{r^3} &= \frac{4 \cdot \pi}{G \cdot M}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Hermed har vi faktisk udledt Keplers 3. lov i specieltilfældet med en jævn cirkelbevægelse, da højresiden i (13) er en konstant!

Tyngdeaccelerationen på Jorden

Vi skal benytte gravitationsloven samt Newtons 2. lov til at bestemme en værdi for den velkendte tyngdeacceleration g . Vi tænker os en person, som står på Jordens overflade og slipper en genstand med massen m . Den resulterende kraft på genstanden er klart massetiltrækningen mellem Jord og objekt med henholdsvis masse M og m . Afstanden mellem objekterne kan med meget god tilnærmelse sættes lig med Jordens radius R .



Det giver anledning til følgende ligning:

$$m \cdot a = F_{\text{res}} = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \Leftrightarrow a = \frac{G \cdot M}{R^2}
 \tag{14}$$

Med talværdierne for G , M og R fra eksempel 5 giver det $a = 9,82 \text{ m/s}^2$, hvilket er den velkendte værdi for tyngdeaccelerationen på Jorden.