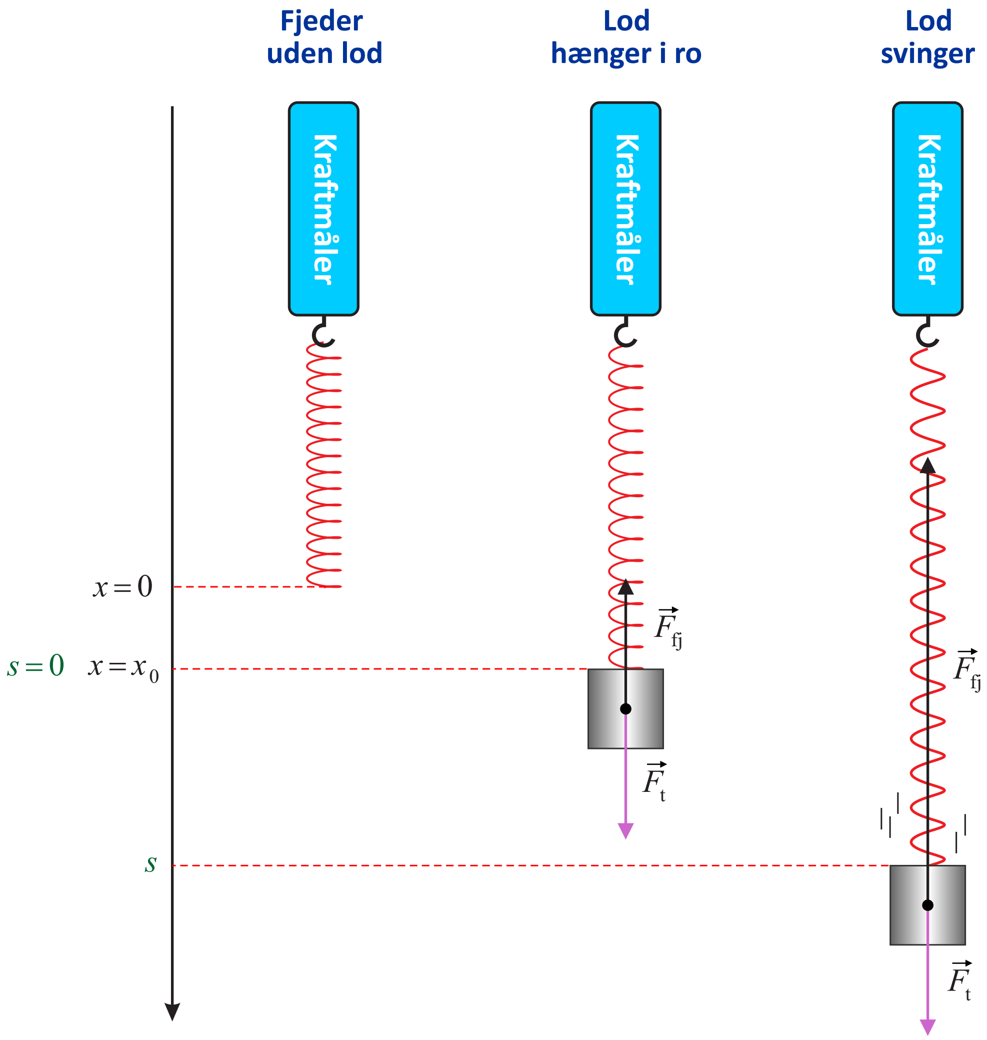
Fjedersvingninger med og uden dæmpning

Vi skal kigge på *fjedersvingninger*, både med og uden dæmpning. Dæmpningen i anden del af forsøget stammer fra luftmodstand. Vi antager, at fjederen er *masseløs* og adlyder *Hookes' lov*: $F_{\text{fj}} = -k \cdot x$, hvor x er fjederens udstrækning. Udstrækningen bliver en funktion af tiden, når loddet bevæger sig: $x = x(t)$. Massen af loddet betegnes med m.

Svingninger uden luftmodstand



Svingninger uden dæmpning

1. Benyt Newtons 2. lov til at vise, at følgende gælder:

(1) $$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot g - k \cdot x$$

2. Sæt $x_0 = m \cdot g / k$. Vis at x_0 svarer til den udstrækning fjederen vil få, hvis loddet hænger i ro i fjederen.

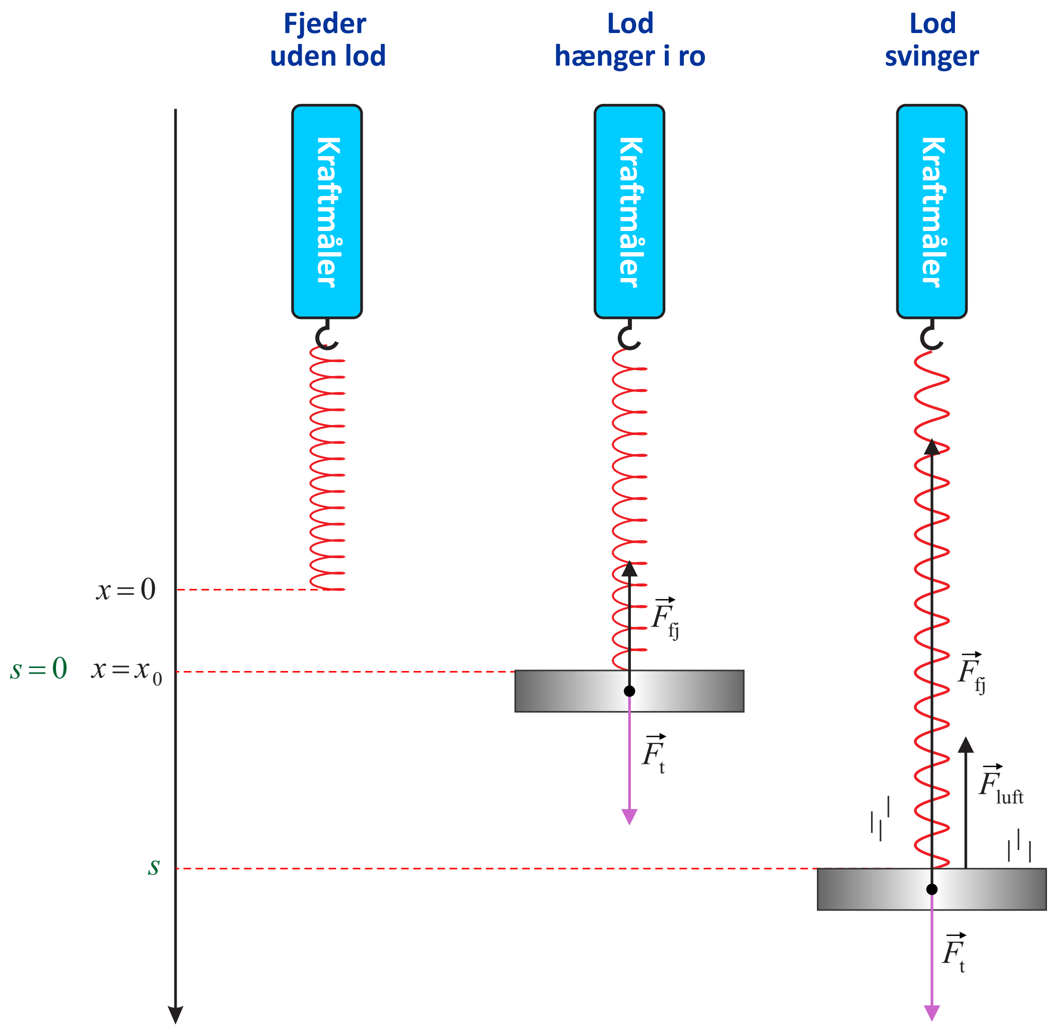
3. Foretag følgende variabelskifte: $s = x - x_0$. Det skal forstås som funktion af tiden *t*: $s(t) = x(t) - x_0$. Vis at differentialligningen derved bliver til:

(2) $$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = -k \cdot s$$

Fordelen ved (2) fremfor (1) er at konstantleddet er forsvundet!

4. Prøv at forklare hvordan variabelskiftet kan fortolkes fysisk?
5. Matematikken indeholder færdige løsninger til differentialligningen $y'' = -c \cdot y$. Benyt teorien til at angive løsningerne til (2). Vælg derefter løsning med passende randbetingelser!
6. Redegør for, at fjederbevægelsen bliver en harmonisk svingning med svingningstiden $T = 2\pi \cdot \sqrt{m/k}$.
7. Hvilken betydning har massen af loddet og fjederkonstanten på bevægelsen?

Svingninger med luftmodstand



Svingninger med dæmpning

I denne omgang skal vi kigge på situationen med *dæmpning*, idet vi vil antage, at luftmodstanden er proportional med og modsat rettet hastighedsvektoren. Proportionalitetskonstanten kalder vi c.

1. Benyt Newtons 2. lov til at vise, at følgende gælder:

(1)
$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot g - k \cdot x - c \cdot \frac{dx}{dt}$$

2. Sæt $x_0 = m \cdot g/k$ ligesom i tilfældet uden dæmpning. Foretag igen variabelskiftet $s = x - x_0$. Vis, at differentialligningen (1) bliver til:

(2)
$$m \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = -k \cdot s - c \cdot \frac{ds}{dt}$$

4. Benyt teorien for løsningerne til en harmonisk 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter af formen $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ til at angive løsninger til (2).
5. Fortolk løsningerne fysisk. Overvej hvilken betydning fjederkonstanten og luftmodstandskoefficienten har for bevægelsen.