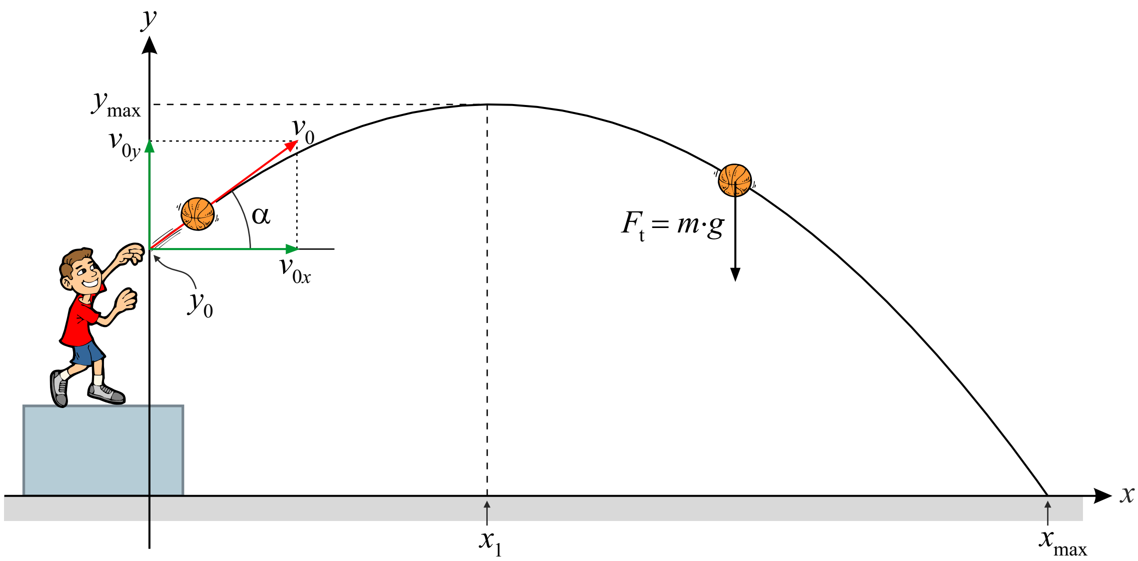
Det skrå kast uden luftmodstand

I dette lille tillæg skal vi smart benytte vektorer til at udlede udtryk for stedfunktionen og hastigheden i det skrå kast uden luftmodstand. Vi vil gøre brug af de fundamentale kendsgerninger, at hastigheden $\vec{v}(t)$ fås ved at differentiere stedfunktionen $\vec{r}(t)$, og accelerationen $\vec{a}(t)$ fås ved at differentiere hastighedsfunktionen $\vec{v}(t)$. Som bekendt differentierer man en vektorfunktion ved blot at differentiere hver koordinat for sig.



Udgangspunktet er, at en bold kastes skråt op i en vinkel på α i forhold til vandret. Farten i det øjeblik, hvor bolden forlader personens hånd, er v_0. Hastighedsvektorens koordinater til tiden $t = 0$ fås ved at projicere på hver af de to akser:

(1) $$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Bemærk, at når vi skriver en størrelse både med og uden vektorpil, så betyder den uden vektorpil *længden af vektoren*. I dette tilfælde er $\vec{v}_0$ *hastighedsvektoren* og v_0 er længden af hastighedsvektoren, også kaldet *farten*!

På trods af at bolden bevæger sig til siden, så er den resulterende kraft på bolden lig med en lodret rettet tyngdekraft af størrelsen $F_t = m \cdot g$. Accelerationen i bevægelsen er altså $g = 9{,}82\ \mathrm{m/s^2}$ og den er rettet nedad. Derfor kan vi angive den ved vektoren:

(2) $$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Vi kan nu regne baglæns: For at finde hastigheden, skal vi finde en vektorfunktion, der differentieret er lig med accelerationsvektoren. Vi skal altså finde stamfunktioner. Første koordinaten er 0, så her er stamfunktionen en konstant. Vi kalder den c_1. Stamfunktionen til $-g$ er $-g \cdot t + c_2$, hvor c_2 er en ny konstant. Vi har altså

(3) $$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ -g \cdot t + c_2 \end{pmatrix}$$

Vi kan imidlertid finde konstanterne ved at indsætte $t=0$ og bruge startbetingelserne:

$$(4)\qquad \vec{v}(0)=\begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ -g\cdot 0+c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1=v_{0x} \text{ og } c_2=v_{0y}$$

Indsættes værdierne for c_1 og c_2 i (3) fås:

$$(5)\qquad \vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_{0x} \\ -g\cdot t+v_{0y} \end{pmatrix}$$

Vi skal nu videre til stedfunktionen og finder igen stamfunktioner for hver koordinat:

$$(6)\qquad \vec{r}(t)=\begin{pmatrix} v_{0x}\cdot t+c_3 \\ -\tfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2+v_{0y}\cdot t+c_4 \end{pmatrix}$$

Igen kan de to konstanter findes ved at indsætte $t=0$ og udnytte, at boldens startposition er $\vec{r}(0)=(0,y_0)$. Det overlades til læseren at vise, at det giver følgende: $c_3=0$ og $c_4=y_0$. Dermed haves:

$$(7)\qquad \vec{r}(t)=\begin{pmatrix} v_{0x}\cdot t \\ -\tfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2+v_{0y}\cdot t+y_0 \end{pmatrix}$$

Hvis vi indsætter udtrykket for starthastigheden (1) i (7), fås:

$$(8)\qquad \vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_0\cdot\cos(\alpha)\cdot t \\ -\tfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2+v_0\cdot\sin(\alpha)\cdot t+y_0 \end{pmatrix}$$

Tilsvarende fås følgende for indsættelse af (1) i (5):

$$(9)\qquad \vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_0\cdot\cos(\alpha) \\ -g\cdot t+v_0\cdot\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Hvis man tegner banekurven for stedfunktionen $\vec{r}(t)$ får man en *parabel*, deraf udtrykket *kasteparablen*. Med udtrykkene for stedfunktionen og hastighedsfunktionen kan man løse en masse spørgsmål: Hvornår rammer bolden jorden, hvornår når bolden sit højeste punkt, etc.

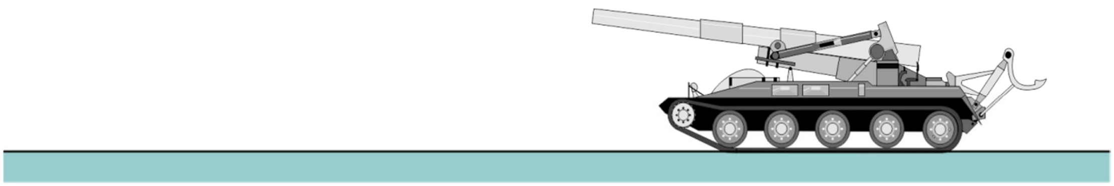
En vigtig erkendelse i udtrykket (9) er, at hastigheden i x-aksens retning er *konstant*. Hvis man deler bevægelsen op i en vandret og en lodret bevægelse, så er bevægelsen i vandret retning altså *jævn*, i pæn overensstemmelse med at der ingen kraft er i den retning – husk Newtons 1. lov!

Opgaver

Nedenfor et par tilhørende opgaver til emnet det skrå kast. Det er oplagt at anvende et CAS-værktøj, for eksempel Maple.

Opgave1

En frygtet tank fra 2. verdenskrig er den tyske Tigertank. Den havde en kanon med betegnelsen 8,8 cm KwK 36 L/56. Projektilets mundingshastighed var 810 m/s. Vi antager, at løbets højde over jorden er 2 meter og at løbet indstilles, så det danner en vinkel på 10 grader med vandret. I det følgende ser vi også bort fra luftmodstand på trods af, at det er urealistisk i dette tilfælde.



(NB! Figuren er ikke et billede af omtalte tank).

a) Hvor langt ude er projektilet i vandret retning, og hvor højt over jorden er projektilet efter 1 sekund? Bestem også partiklens fart til dette tidspunkt.
b) Bestem stighøjden, altså den maksimale højde projektilet opnår. Bestem desuden, hvor langt ude (vandret), projektilet opnår den maksimale højde samt tidspunktet, hvor det sker.
c) Bestem kastelængden, altså den afstand projektilet når ud på samt tidspunktet for nedslaget.
d) Bestem hastighedsvektoren samt farten umiddelbart før nedslaget.
e) Tegn banekurven for projektilet. Overvej at sørge for at 1 meter på x- og y-akse vises lige store.

Hjælp til opgave 1

Under løsningen er det fornuftigt at definere nogle funktioner: Kald stedfunktionens første koordinat for $x(t)$ og dens anden koordinat for $y(t)$. Dermed kan hastighedsvektorens koordinater defineres ved $v_x(t) := x'(t)$ og $v_y(t) := y'(t)$. Normalt regnes med enheder, men når man har at gøre med funktioner, er det fornuftigst at undlade enheder og lade det være underforstået, at størrelserne er i SI-enheder. Farten er defineret som længden af hastighedsvektoren: $v(t) := \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2}$. I delspørgsmål b) og c): Hvad er det, som karakteriserer de to punkter? Man kan sige noget om enten stedfunktionen eller hastighedsfunktionen …

Opgave 2

Basketball spilleren Michael Jordan skal sende et straffekast i kurven.

Hans vandrette afstand til kurven er 3,96 m og kurvens kant befinder sig 3,05 m over jorden. Michael Jordan kaster med en vinkel på 35 grader i forhold til vandret (*elevationen*) og bolden forlader hans hånd i en højde af 2,30 m. Hvor meget fart skal han give bolden, så den lige netop rammer ned i kurven? Igen ses der bort fra luftmodstand.

Hjælp til opgave 2

Man kan opstille to ligninger med to ubekendte og på CAS-værktøjet til at løse dem.