#### Definition 1

En funktion på formen , , hvor  og  er konstanter, kal­­­des for en *potensudvikling* eller en *potensiel funktion*. Bemærk, at man konsekvent har valgt at definere funk­tio­n­er­ne for udelukkende positive *x*-værdier, selvom man for visse vær­dier af *a* godt kun­ne have indsat negative værdier af *x*. For andre værdier af *a*, for ek­sempel , vil det derimod ikke give mening at indsætte negative *x*-værdier (Over­vej!). Hvis  kaldes funktionen for en *potensfunktion*.

#### Eksempel 2

Nedenfor er afbildet graferne for forskellige potensfunktioner (dvs. ). Vi ser, at po­tens­funktionen er *voksende* når  og *aftagende* når . For  er funk­tio­nen *konstant*.

..\..\..\..\Documents and Settings\Erik Vestergaard\Dokumenter\Matematik\potens1.eps

Hvis man ændrer på *b*-værdierne i forskrifterne for de afbildede funktioner, så vil de nye grafer *ikke* være en parallelforskydning i forhold til de gamle; derimod vil der være tale om en *skalering* i *y-*aksens retning. Det vil svare til, at man stræk­ker eller kom­pri­me­­rer grafen i *y*-aksens retning (Overvej hvorfor!).

|  |
| --- |
| **Sætning 3**  Lad . Da gælder:   1. Grafen for *f*  går igennem punktet . 2. *x* ganges (*fremskrives*) med *k  y* ganges (*fremskrives*) med . 3. Funktionen er *voksende*, hvis , *aftagende*, hvis  og *konstant*, hvis . |

*Bevis*: . Dette viser a). For at vise b) indsætter vi  i for­skrif­ten for og omskriver:

(1) 

hvor vi for at få tredje lighedstegn har benyttet en af potensreglerne. Udreg­nin­gen (1) viser, at hvis *x* ganges med *k*, så bliver den nye *y*-værdi gan­ge så stor som den forrige *y*-værdi. c) Overlades til læseren at overveje.

..\..\..\..\Documents and Settings\Erik Vestergaard\Dokumenter\Matematik\Potensielle funktioner\sætning3-1.eps



Bemærk, at sætning 3b) fortæller os, at hvis *x* ganges med et bestemt tal, så ganges også *y* med et bestemt tal – *uafhængigt* af hvilket *x* man startede med!

Husk fra rentesregningen, at når man ganger med et tal *F* (*fremskrivningsfaktoren*), så svarer det til at lægge *renten* *r* til, hvor sammenhængen mellem *F* og *r* er . At lægge 25% til 500 svarer altså til at gange 500 med 1,25, idet . Vi siger, at 500 har fået en *relativ tilvækst* på 0,25 eller 25%. Omvendt svarer en frem­skriv­­ningsfaktor på 0,88 til at trække 12% fra, idet .

Den­ne sam­menhæng mellem fremskrivningsfaktoren *F* og den relative tilvækst *r* bety­der, at vi kan omformulere sætning 3b). Da vi har at gøre med fremskrivning af både *x* og *y*, vil vi indføre betegnelsen , som det *x* fremskrives med, mens  skal betegne det, som *y* fremskrives med. Tilsvarende vil vi lade  betegne den relative tilvækst i *x*, mens  skal betegne den relative tilvækst i *y*. Vi har dermed

(2) 

Sætning 3b) kan dermed udtrykkes på følgende måde: , hvormed

(3) 

Indsættes udtrykkene fra (2) i (3), fås følgende sætning:

|  |
| --- |
| **Sætning 4** (Relative tilvækster)  Givet en potensiel udvikling. Hvis *x* gives en *relativ tilvækst* på , så får *y* en relativ tilvækst på , bestemt ved:  (4) |

#### Eksempel 5

Betragt potensudviklingen med forskrift .

a) Hvad sker der med *y*, hvis *x* ganges med 1,12?

b) Oversæt det, som sker i spørgsmål a), til relative tilvækster i *x* og *y*.

c) Hvor meget skal man gange *x* med, for at *y* fordobles?

*Løsning*:

a) Ifølge (3) fås: , så *y* ganges med 1,298.

b) Ifølge (2) haves:  og  . En relativ tilvækst på 12% i *x* giver altså en relativ tilvækst på 29,8% i *y*.

c) Da  fås ifølge (3): . Sva­ret er altså, at *x* skal gan­ges med 1,352.

Figuren på næste side illustrerer skematisk situationen i spørgsmålene a) og b).

..\..\..\..\Documents and Settings\Erik Vestergaard\Dokumenter\Matematik\Potensielle funktioner\eks4.eps



#### Eksempel 6

Betragt potensudviklingen med forskrift .

a) Hvis *x* vokser med 17%, hvor mange procent vokser *y* da med?

b) Hvor mange procent skal *x* vokse med, for at *y* vokser med 27%?

*Løsning*: Vi benytter sætning 4.

a) 



Svaret er altså, at *y* vokser med 8,8%.

b) 



Dermed konkluderer vi, at *x* skal vokse med 55,7%, for at *y* vokser med 27%.



#### Eksempel 7

Lad . Hvor mange procent øges *y* med, hvis *x* reduceres med 22%?

*Løsning*: Vi benytter igen sætning 4.



.

Vi konkluderer, at *y* vokser med 23,3%.



### Forskriften ud fra to støttepunkter

Vi har tidligere set, at man kan bestemme forskriften for en lineær funktion og en eks­po­nentiel funktion, når man kender to punkter på funktionens graf. Dette er også til­fæl­det med potensudviklinger. Det vil vi se på nu.

|  |
| --- |
| **Sætning 8**  Lad  og lad  og  være to punkter på grafen for . Da kan eksponenten *a* bestemmes ved følgende formel:  (5) |

*Bevis*:

..\..\..\..\Documents and Settings\Erik Vestergaard\Dokumenter\Matematik\Potensielle funktioner\sætning7.eps

Da punkterne ligger på grafen, haves  og , som angivet på figu­ren. skal her antages at være kendte. Derimod er *a* og *b* ukendte. Man ser sne­­digt, at man kan skaffe sig af med den ene ubekendte, *b*, ved at tage forholdet mel­lem de to *y*-værdier:

(6) 

hvor vi blandt andet har brugt en potensregel. For at isolere *a* tager vi logaritmen på begge sider af (6). Herved fås:

(7) 

hvor logaritmereglerne er blevet anvendt. 

#### Eksempel 9

Bestem forskriften for den potensielle funktion, hvis graf går igennem følgende to punkter: (­­­2,5) og (6,27).

Løsning:



Dermed haves foreløbigt:. For at bestemme *b* indsættes ét af de to op­givne datapunkter, ligegyldigt hvilket. Vi vælger (2,5):



Altså fås .



#### Bemærkning 10

For at finde *b*, kan du også skrive mere direkte: .

#### Bemærkning 11

Af (7) fremgår det, at man kan bruge følgende alternative udtryk for *a*:

(8) 