## Differentiabilitet og kontinuitet

I dette lille tillæg skal vi kigge på begrebet kontinuitet og vise, at der er en sam­men­hæng mellem begreberne differentiabilitet og kontinuitet.

|  |
| --- |
| Definition (Kontinuitet) En funktion *f* siges at være *kontinuert* i punktet , hvis der gælder:  (1) |

#### Bemærkning

Vi har altså at gøre med et *fast* punkt  og et bevægeligt punkt *x*. Sidstnævnte lader vi be­væge sig hen mod . Man kunne også alternativt kalde det bevægelige punkt for  og så lade . Da oversættes betingelsen for kontinuitet i  til:

(2)  for 

Egenskaben (2) er det samme som  for . Eftersom  kan vi formulere kontinuitetsbetingelsen på en tredje måde:

(3) 

Den siger at *y*-tilvæksten skal gå mod 0, når *x*-tilvæksten går mod 0. Hvilken af de tre formuleringer man vælger, er lidt en smagssag.

#### Grafisk forståelse

Vi skal kigge på situationen grafisk i et par eksempler. Hvis funktionen har grafen, som vist på figur 1 nedenfor, så er *f* kontinuert i , for når det bevægelige punkt *x* bevæger sig hen imod , så vil det grønne bevægelige grafpunkt bevæge sig ned imod det faste sorte grafpunkt. Altså vil  nærme sig til . Bemærk, at denne egenskab gæl­der uanset om *x* nærmer sig fra *venstre* eller fra *højre* ind mod !



Lad os kigge på grafen for en anden funktion. På figur 2 nedenfor vil det grønne be­væ­gelige grafpunkt bevæge sig ned mod punktet med den åbne bolle, såfremt *x* nærmer sig til  fra højre. Det betyder at  for  (plusset hentyder til at *x* nær­mer sig fra højre). Men da , så er betingelse (1) ikke opfyldt. Hvis *x* nærmer sig fra venstre, vil det derimod gælde at . Da imidlertid græn­se­vær­­dien skal være , når *x* nærmer sig til  fra *både* højre og venstre, må vi kon­klu­­dere, at *f* *ikke* er kontinuert i .



En funktion er altså ikke kontinuert i , hvis grafen foretager et spring i dette punkt! Vi skal slutte af med en sætning, der fortæller, at det er en stærkere betingelse at være dif­­ferentiabel i et punkt  end at være kontinuert i det samme punkt.

|  |
| --- |
| Sætning Giver en funktion *f*. Hvis *f* er differentiabel i , så er *f* også kontinuert i . |

*Bevis*: Hvis *f* er differentiabel i , så har differenskvotienten  en grænseværdi for . Lad os kalde grænseværdien for *a*. Vi kan omskrive *y*-tilvæksten:



Da *y*-tilvæksten går imod 0 for , så er *f* kontinuert i  ifølge formule­ring (3).

