Maple 17 B-Niveau

Indhold

1 Reduktion af udtryk

1.1 Saml led med collect

Maple reducerer visse udtryk helt automatisk. Det gælder fx taludtryk:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+5=\frac{59}{10}$$

Men også visse symbolske udtryk - fx

$$4\cdot a+3\,b-7(a+b)=-3\,a-4\,b$$

men i udtrykket (hvor vi i ovenstående udtryk har erstattet 4-tallet med et k, sker der kun noget med b'erne - ikke med a'erne :

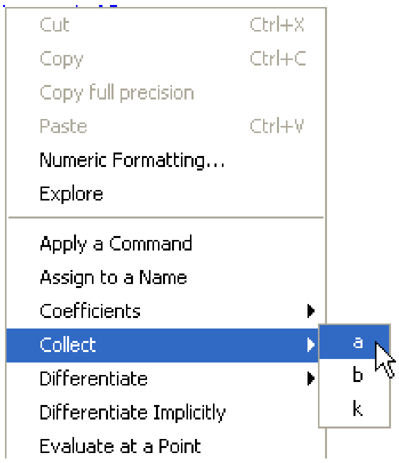
$$k\cdot a+3\,b-7(a+b)=a\,k-7\,a-4\,b$$

I dette udtryk kan a jo sættes uden for en parentes, altså $(k-4)\cdot a-4\,b$, men det gør Maple ikke. Og det er ikke helt klart, hvad man skal gøre for at få Maple til at samle a'erne.

Højreklik på udtrykket:

$$k\cdot a+3\,b-7(a+b)$$

Så kommer en kontekst-menu med en liste over alt der er relevant at gøre ved udtrykket. Vælg her **Collect >*a***



$$k\cdot a+3\,b-7(a+b)\overset{\text{collect w.r.t. a}}{=}(k-7)\,a-4\,b$$

1.2 Gang ind i parenteser med expand

Maple vil automatisk gange visse parenteser ud - fx hvis der står tal foran - og automatisk reducere udtrykket mest muligt

$$3(a+b)+7(a-4\,b)=10\,a-25\,b$$

Dette sker ikke i et udtryk som fx

$$(5\,a+2\,b)\cdot(a-b)=(5\,a+2\,b)\,(a-b)$$

Her skal du hjælpe til.

Højreklik på udtrykket

$$(5\,a+2\,b)\cdot(a-b)$$

og vælg **Expand** i kontekst-menuen. Så vil parenteserne blive ganget ud:

$$(5\,a+2\,b)\cdot(a-b) \overset{\text{expand}}{=} 5\,a^2-3\,a\,b-2\,b^2$$

1.3 Sæt uden for parentes med factor

Hvis du vil have a sat uden for parentes i i udtrykket $a+a\cdot b$, skal du bruge **Factor** fra kontekst-menuen:

$$a+a\cdot b \overset{\text{factor}}{=} a\,(b+1)$$

Factor er uhyre effektiv, og kan klare næsten enhver faktorisering. Lad os prøve, om vi kan komme tilbage i udregningen

$$(5\,a+2\,b)\cdot(a-b) \overset{\text{expand}}{=} 5\,a^2-3\,a\,b-2\,b^2$$

$$5\,a^2-3\,a\,b-2\,b^2 \overset{\text{factor}}{=} (5\,a+2\,b)\,(a-b)$$

- og det gik da meget godt.

1.4 Sæt på fælles brøkstreg med simplify

Simple brøker - herunder talbrøker - reduceres automatisk:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=\frac{5}{6}\,a$$

Men der er ingen automatisk reduktion i et udtryk som

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

Hvis du vil have brøkerne sat på fælles brøkstreg skal du fx bruge **Simplify > Simplify** fra kontekst-menuen

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \overset{\text{simplify}}{=} \frac{a+b}{a\,b}$$

Simplify er meget fleksibel og burde nok ikke virke her, idet udtrykket på høresiden er faktisk mere kompliceret end det oprindelige udtryk. Nok er der kun én brøk på højresiden, men skal der indsættes konkrete værdier for a og b, skal der kun foretages 2 indsættelser i venstresiden, mens højresiden kræver 4 indsættelser. I den forstand er venstresiden simplere.

1.5 Reduktion af eksponenter med simplify

Simple taleksponenter bliver reduceret automatisk, som fx i

$$\frac{x^3\,y^{\frac{7}{3}}\,x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}\,y^2}=x^{19/6}\,y^{1/3}$$

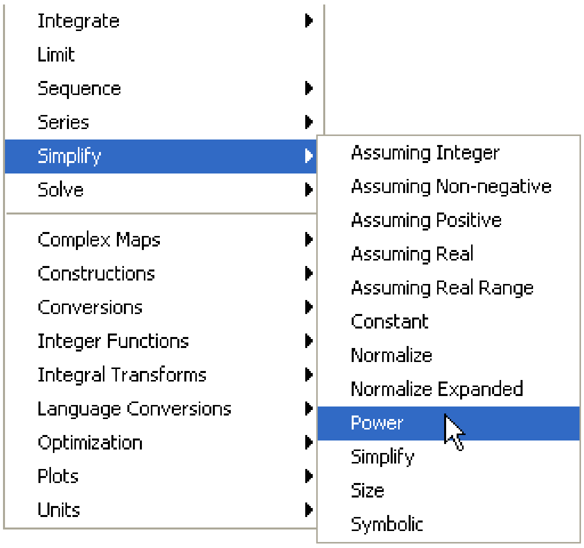
men ikke, hvis der er bogstaver som eksponenter:

$$\frac{x^a\cdot y^b\cdot x^{\frac{a}{2}}}{x^c\cdot y^2}=\frac{x^a\,y^b\,x^{\frac{1}{2}\,a}}{x^c\,y^2}$$

Højreklik på

$$\frac{x^a\cdot y^b\cdot x^{\frac{a}{2}}}{x^c\cdot y^2}$$

og vælg **Simplify > Power** i kontekst-menuen (kun et udsnit er vist)



Så vil alle (næsten da) potensregneregler være tilgængelige:

$$\frac{x^a \cdot y^b \cdot x^{\frac{a}{2}}}{x^c \cdot y^2} \xrightarrow{\text{simplify power}} x^{\frac{3}{2}a - c}\, y^{b-2}$$

Prøver du **Simplify** > **Power** på udtrykket $(x \cdot y)^c$, sker der ingen ting. Prøv!

Her gælder jo reglen, at $(x \cdot y)^c = x^c \cdot y^c$, men du skal huske på, at her kræves, at $x > 0$ og at $y > 0$. Vælger du i stedet **Simplify** > **Assuming Positive**, så sker der noget!

1.6 Øvelser

Omskriv udtrykkene til ledform

1. $(a+6)^2$
2. $(3-2b)^2$
3. $(x+2y) \cdot (x-2y)$

Omskriv til kvadratet på en to-leddet størrelse

1. $4x^2 + 36 - 24x$
2. $a^2 + 10a + 25$
3. $s^2 + 6s \cdot t + 9t^2$

Reducer udtrykkene

1. $2 + 3(s+1) - 4(2-s)$
2. $\frac{t}{2} + \frac{2t}{5} - \frac{1}{10}$
3. $x \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$

Forkort brøken

1. $\frac{4x^2 - 9}{4x^2 - 12x + 9}$

Reducer udtrykkene

1. $\dfrac{a^5 \cdot a^3}{a^4}$

2. $\dfrac{6^{-2} \cdot 6^3 \cdot 36}{2 \cdot 3}$

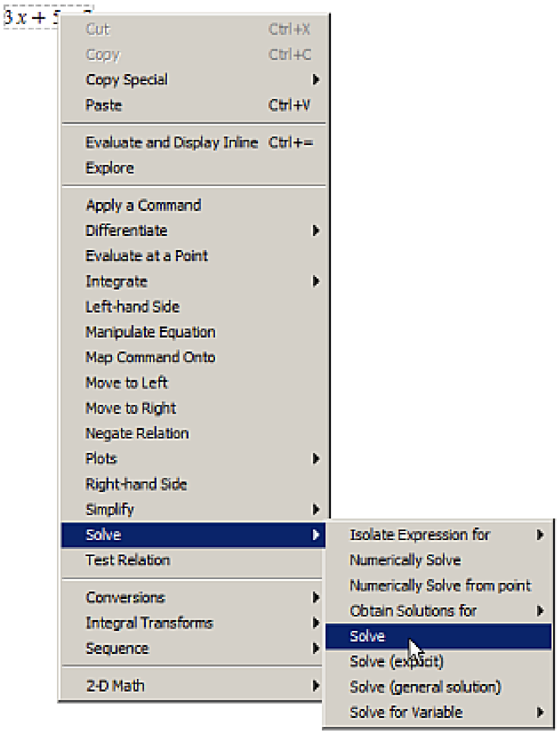
2 Løsning af ligninger i Maple

2.1 Solve-kommandoen og førstegradsligninger

Hvis du vil løse en konkret ligning som fx $3x+5=7$, så kan du vælge mellem

metode1 (højreklik - cmd+klik)

Her højreklikker (Mac: cmd+klik) du på ligningen og vælger **solve > solve** i menuen:



$$3x+5=7 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x=\frac{2}{3}\right\}$$

Hvis du vil løse en symbolsk ligning på denne form, så går det galt

$$a\cdot x+b=0 \xrightarrow{\text{solve}} \{a=a,\, b=-a\,x,\, x=x\}$$

Maple ved jo ikke, hvad der er den ubekendte. Læg mærke til de krøllede parenteser. Det er Maples måde at håndtere mængder på: Løsningen indeholder 3 elementer (i dette tilfælde ligninger): $a=a, x=x$ og $b=a\cdot x$. Det skal forstås som en parametrisering af løsningen, hvor a og x kan antage vilkårlige værdier, mens b er fastlagt som produktet af a og x.

Du er nødt til at fortælle Maple, hvilken variabel du vil løse med hensyn til. Det gør du ved at højreklikke på ligningen og vælge **solve > solve for variable > x**:

$$a\cdot x+b=0 \xrightarrow{\text{solve for x}} \left[\left[x=-\frac{b}{a}\right]\right]$$

- eller du kan foretage menuvalget **solve > obtain solution for > x**:

$$a\cdot x+b=0 \xrightarrow{\text{solutions for x}} -\frac{b}{a}$$

afhængigt af, hvordan du vil have løsningen præsenteret.

Endelig kan du benytte **solve > isolate expression for > x**:

$$a \cdot x + b = 0 \xrightarrow{\text{isolate for x}} x = -\frac{b}{a}$$

Du skal dog være lidt forsigtig med den sidste, idet den kun giver én løsning. Det er intet problem her, men kan være det i andre sammenhænge.

metode 2 (kommando)

Her skriver du kommandoen (i en math-region)

$solve(3\,x + 5 = 7)$

$$\frac{2}{3} \tag{2.1}$$

Hvis du vil løse en symbolsk ligning på denne form, så går det galt

$solve(a \cdot x + b = 0)$

$$\{a = a, b = -a\,x, x = x\} \tag{2.2}$$

Maple ved jo ikke, hvad der er den ubekendte. Du er nødt til at fortælle Maple, hvilken variabel du vil løse med hensyn til (her x) :
$solve(a \cdot x + b = 0, x)$

$$-\frac{b}{a} \tag{2.3}$$

Du kan få skrevet resultatet som en mængde ved fx at tilføje mængdeparenser omkring de ubekendte:

$solve(a \cdot x + b = 0, \{x\})$

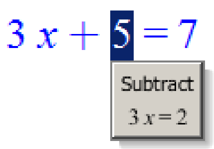
$$\left\{x = -\frac{b}{a}\right\} \tag{2.4}$$

metode 3 (smart popup)

Indtast ligningen og afslut med Enter
$3\,x + 5 = 7$

$$3\,x + 5 = 7 \tag{2.5}$$

Marker 5-tallet i ligningen, og hold markøren over 5-tallet



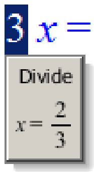
Et lille vindue popper op og foreslår, at trække 5 fra på begge sider af ligningen. Klik for at acceptere. Maple svarer med
$3\,x + 5 = 7$

$$3\,x + 5 = 7 \tag{2.6}$$

$\xrightarrow{\text{subtract 5 from both sides}}$

$$3\,x = 2$$

Marker nu 3-tallet. Her foreslår Maple at dividere med 3. Klik for at acceptere



Herefter har du løsningen:

$3\,x + 5 = 7$

$$3\,x + 5 = 7 \tag{2.7}$$

$\xrightarrow{\text{subtract 5 from both sides}}$

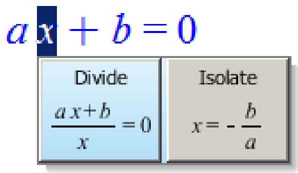
$$3\,x = 2 \tag{2.8}$$

$\xrightarrow{\text{divide both sides by 3}}$

$$x = \frac{2}{3} \tag{2.9}$$

Hvis du vil løse en symbolsk ligning på denne form, så går det let og smertefrit. Indtast ligningen, tast Enter og marker x:
$a \cdot x + b = 0$

$$a\,x + b = 0 \tag{2.10}$$



Vælg Isolate, og ligningen er løst
$a \cdot x + b = 0$

$$a\,x + b = 0 \tag{2.11}$$

$\xrightarrow{\text{isolate for x}}$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Du kan naturligvis isolere a og b tilsvarende.

2.2 To ligninger med to ubekendte

Skal du løse et system af to ligninger med to ubekendte, fx

$$\begin{cases} 3\,x + 4\,y = -2 \\ 6\,x + y = 10 \end{cases}$$

kobler du de to ligninger sammen med { , } i solve-kommandoen:
$solve(\{3\,x + 4\,y = -3, 6\,x + y = 5\}, \{x, y\})$

$$\left\{x = \frac{23}{21}, y = -\frac{11}{7}\right\} \tag{2.12}$$

- så simpelt kan det gøres!

Du kan også løse to ligninger med to ubekendte ved at skrive de to ligninger med et **komma** imellem, højreklikke og fortage menuvalget **solve** > **solve**:

$$3x + 4y = -3, 6x + y = 5 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{23}{21}, y = -\frac{11}{7}\right\}$$

2.3 Ingen løsninger og uendeligt mange løsninger

Ingen løsninger:

Har en ligning eller et ligningssystem ingen løsninger - eller kan Maple ikke finde nogen - så returneres ingenting: Mere præcist den tomme udtryksfølge returneres (NULL).

$solve(3x - 4 = 3x + 5, x)$

Ved at sætte informationsniveauet for *solve* til 1 fås en advarsel, når *solve* ikke kan finde en løsning (indtastes som infolevel Ctrl_ solve):

$infolevel_{solve} := 1$

$$1 \tag{2.13}$$

$solve(3x - 4 = 3x + 5, x)$

```
solve: Warning: no solutions found
```

Sæt infolevel for solve tilbage til 0

$infolevel_{solve} := 0$

$$0 \tag{2.14}$$

Uendeligt mange løsninger:

$solve(3x + 4 = 3x + 4, x)$

$$x \tag{2.15}$$

Her returnerer Maple blot x. Det skal forstås på den måde, at alle x er løsninger til ligningen. Måske er det nemmere at se, hvis vi sætter krøllede parenteser om x:

$solve(3x + 4 = 3x + 4, \{x\})$

$$\{x = x\} \tag{2.16}$$

Et eksempel på et ligningssystem med uendeligt mange løsninger er

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 6x + 4y = -4 \end{cases}$$

$solve(\{3x + 2y = -2, 6x + 4y = -4\}, \{x, y\})$

$$\left\{x = x, y = -\frac{3}{2}x - 1\right\} \tag{2.17}$$

Dette skal tolkes på den måde, alle løsninger kan udtrykkes som talpar på formen $\left(x, -\frac{3}{2}x - 1\right)$, hvor x kan vælges frit.

2.4 Andengradsligninger

Hvis diskriminanten $d > 0$, går løsning af en andengradsligning helt af sig selv:

$$6x^2 + 7x - 5 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{1}{2}\right\}, \left\{x = -\frac{5}{3}\right\}$$

Hvis diskriminanten $d = 0$, bliver løsningen skrevet to gange:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1\}, \{x = 1\}$$

Almindeligvis er det ligegyldigt, men hvis det irriterer dig at se samme løsning skrevet flere gange, så kan du undgå dette ved at tilføje en *option* i solve-kommandoen

$$solve\left(x^2 - 2x + 1 = 0, x, DropMultiplicity = true\right)$$

$$1 \tag{2.18}$$

Hvis diskriminanten $d < 0$, har ligningen ingen reelle løsninger, men alligevel finder Maple to (komplekse) løsninger:

$$x^2 + x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{7}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{7}\right\}$$

Du kan undgå de komplekse løsninger på flere måder. Det bedste i forbindelse med andengradsligninger er, at du først finder diskriminanten. Hvis denne er negativ, konkluderer du, at der ingen reelle løsninger findes, og undgår herved at bruge solve.

$$discrim\left(x^2 + x + 2, x\right) = -7$$

Læg mærke til, at det kun er andengradsudtrykket du kan indsætte i *discrim* - indsætter du ligningen, så får du en fejl. Inden du indsætter, skal du sørge for, at andengradsligningen er på standardformen med 0 på højresiden.

3 Variabler i Maple

3.1 Navngivning

I Maple kan du navngive stort set hvad som helst - og siden hen benytte navnet som reference. Der er dog et par helt grundlæggende regler, der skal overholdes:

1. Navnet skal starte med et bogstav.
   Det betyder ikke noget, om det er et stort eller et lille bogstav, og det må såmænd også gerne være et græsk bogstav.
   Det er vigtigt at bemærke, at Maple skelner mellem store og små bogstaver.
2. Reserverede kommandoer må ikke benyttes.
   Maple gør opmærksom på dette med fejlmeldingen
   'Error, attemting to to assign to `<name>` which is protected'
   Det kan du reparere ved at definere din variabel som lokal.

3.2 Definition af en variabel mm.

Navngivning sker med := eller ved at benytte 'Assign to a Name' fra kontekstmenuen.

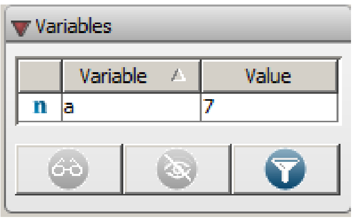
Vil du fx definere en variabel a med værdien 7, så skriver du

$a := 7$

$$7 \tag{3.1}$$

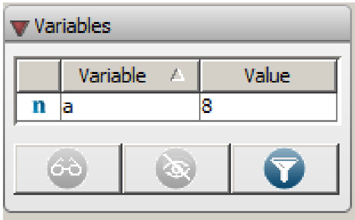
Og først når du taster Enter, defineres variablen.

Du kan følge dine variabler i paletten 'Variables':



Hvis du ændrer værdien af a, vil det straks kunne ses i 'Variables'-paletten. Prøv fx i definitionen ovenfor at ændre værdien af a til 8 — **husk, at variablen ikke er defineret før du afslutter med Enter.**

Herefter skulle 'Variables' paletten gerne se sådan ud:



Definer nu variablerne b og c ved

$b := 5$

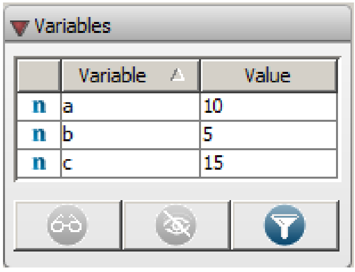
$$5 \tag{3.2}$$

$c := a+b$

$$15 \tag{3.3}$$

og følg med i, hvad der sker i 'Variables' paletten.

Prøv i **(3.1)** at ændre værdien af a til fx 10 (husk at taste Enter for at genberegne), og hold øje med 'Variables'-paletten. Du vil se, at værdien af a ændres, men ikke værdien af c. Det sker først, når du genberegner linje **(3.3)**.



Hvis du ændrer i en definition af en en variabel, er det meget vigtigt, at du får opdateret alle definitioner og beregninger, der er afhængige af den ændrede variabel. Her er et par fif til, hvordan du sikrer dette:

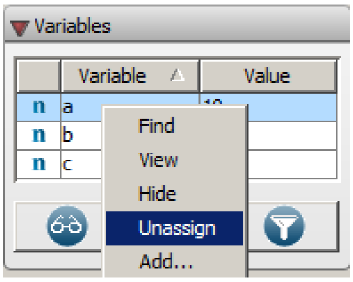
1. Er det blot et par enkelte definitioner og beregninger, der er afhængige af ændringen, er det hurtigtste at genberegne de enkelte udtryk ved at klikke på dem og taste Enter.
2. Er der flere definitioner og beregninger i et afgrænset område, der er afhængige af ændringen, markeres hele området, og der trykkes på knappen !.
3. Er der mange ændringer spredt i arket, vil en genberegning af hele arket være det hurtigste. Tryk på !!!

3.3 Rens en variabel

Hvis a har en værdi og du prøver at løse en ligning som fx $3a+5=7$ ved at højreklikke (Mac: cmd+klik) på ligningen, vil du opdage, at solve slet ikke dukker op i kontekstmenuen.

For at kunne løse denne ligning er du nødt til at rense a, dvs. sørge for, at a ikke har nogen værdi tildelt:

Højreklik (Mac: cmd+klik) på a, og vælg 'Unassign' i menuen:



a er herefter ikke længere med på listen, og kan benyttes som formel variabel (dvs. en variabel, som ikke har nogen værdi).

Vil du have det til at fremgå af dit dokument, at du har renset variablen a, er kommandoen

$a := 'a'$

Du kan rense alle variabler på én gang:

Klik på den første variabel og Shift+klik på den sidste, så alle variabler er markerede. Højreklik i det markerede (Mac: ctrl+klik), og vælg **unassign** fra menuen.

Du kan også rense alle variabler i dit dokument ved at trykke på knappen, eller ved at bruge kommandoen *restart*. I begge tilfælde renses alle variabler (indlæste pakker skal genindlæses).

3.4 Indeks på variable

Du kan lave indeks på variabler på to måder:

literal indeks:

Hvis du ønsker, at indekset skal være en del af variablens navn, fx v_{start}, hvor 'start' står med sænket skrift, så skal du benytte et såkaldt literal index, og det kommer til at se sådan ud (med værdien 5 tildelt):
$v_{start} := 5$

$$5 \tag{3.4}$$

hvor variablen bliver lyserød. Til at skrive v_{start} kan du enten benytte skabelonen i 'Expressions paletten' $\boxed{a_n}$ eller benytte genvejen v__start, hvor __ er to gange understreg.

Selvom start er navnet på en variabel med en værdi tildelt, kan du alligevel definere v_{start}:

$start := 1$

$$1 \tag{3.5}$$

$v_{start} := 5$

$$5 \tag{3.6}$$

vektorindeks:

Hvis du fx har en liste defineret ved

$L := [5, 6, 7, 8]$

$$[5, 6, 7, 8] \tag{3.7}$$

- og du gerne vil have fat på det 3. element i listen, så skriver du
L_3

$$7 \tag{3.8}$$

Her er indeks (altså 3-tallet) lavet med skabelonen $\boxed{a_n}$ i 'Expressions paletten'. Her bevarer L sin sorte farve, så du kan altid på farven se, om et indeks er et literal indeks eller om det er et vektorindeks.

Hvis du tildeler en værdi til L_3, så vil værdien af L ændres tilsvarende

$L_3 := 10$

$$10 \tag{3.9}$$

L

$$[5, 6, 10, 8] \tag{3.10}$$

Hvis du prøver at navngive som under literal indeks:

$start := 1$

$$1 \tag{3.11}$$

L_{start}

$$5 \tag{3.12}$$

Her bliver start beregnet til 1, og det første element i tabellen L udskrives.

Prøv så med

L_{slut}

$$[5, 6, 10]_{slut} \tag{3.13}$$

Her har slut ikke nogen værdi tildelt, men skulle det før eller siden få en værdi, så ved Maple hvad den skal gøre.

Læg mærke til, at L bliver beregnet og indsat i udtrykket L_{slut}.

3.5 Brug af indeks

Du kan navngive mangt og meget i Maple - fx ligninger. Her benytter vi navnene $lign_1$ og $lign_2$ for de to ligninger:

$lign_1 := 3x+5y=7$

$$3x+5y=7 \tag{3.14}$$

$lign_2 := -2x + 1y = 12$

$$-2x + y = 12 \tag{3.15}$$

$solve(\{lign_1, lign_2\}, \{x, y\})$

$$\left\{x = -\frac{53}{13}, y = \frac{50}{13}\right\} \tag{3.16}$$

Du kan også navngive løsningen, fx:
$L := solve(\{lign_1, lign_2\}, \{x, y\})$

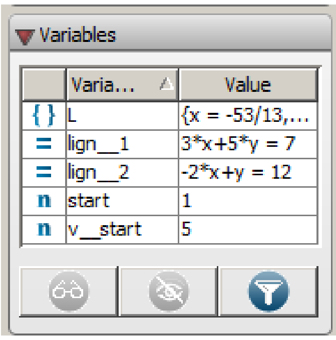
$$\left\{x = -\frac{53}{13}, y = \frac{50}{13}\right\} \tag{3.17}$$

Hvis du vil have de enkelte løsninger trukket ud af L sker dette ved at benytte vektorindeks:

L_1

$$x = -\frac{53}{13} \tag{3.18}$$

Tag et kig på 'Variables'-paletten for at se, hvordan variabler, navngivne ligninger og en løsningen er repræsenteret.



Piktogrammerne i venstre side kan tolkes som: **n** en numerisk variabel, **{}** en mængde og = en ligning.

4 Trigonometri i Maple

4.1 Gym-pakken skal indlæses

Det er lidt besværligt at løse trigonometri opgaver i Maple, idet Maple altid regner i radianer - og ikke i grader, som er sædvanen i forbindelse med trigonometri opgaver. I stedet for at skulle omregne gradtal til radianer, kan du benytte specielle versioner af sinus, cosinus og tangens, der regner i grader. Disse har navnene *Sin*, *Cos*, *Tan*, *invSin*, *invCos* og *invTan*.

Start altid med at indlæse Gym-pakken med kommandoen *with*:

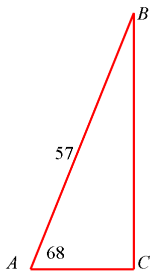
$with(Gym):$

4.2 Eksempel 1 - bestem sider i en retvinklet trekant

I den retvinklede trekant ABC er $C = 90°$, $c = 57$ og $A = 68\ °$

Beregn *a*, *b* og *B*.

Model:



Definer de opgivne størrelser som variable:

$A := 68 : c := 57 :$

Bestemmelse af siden a sker med sinus-formlen $\sin(A) = \frac{a}{c}$. Lad Maple klare udregningerne - blot løs den vha **Solve > Solve**:

$$Sin(A) = \frac{a}{c} \xrightarrow{\text{solve}} \{a = 52.84947972\}$$

Helt tilsvarende sker bestemmelsen af b. Her skal du blot benytte formlen $\cos(A) = \frac{b}{c}$ i stedet:

$$Cos(A) = \frac{b}{c} \xrightarrow{\text{solve}} \{b = 21.35257579\}$$

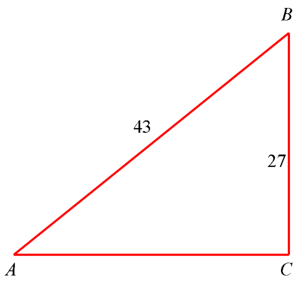
Til slut skal vinkel B beregnes: $90 - A = 22$

4.3 Eksempel 2 - bestem vinkler i en retvinklet trekant

I den retvinklede trekant ABC er $C = 90°$, $c = 43$ og $a = 27$

Beregn A, B og b.

Model:



Først renser vi hukommelsen (ellers giver det problemer ved bestemmelsen af A, da denne jo er defineret i eksempel 1 (du kan også gøre dette i **Variables**-paletten):

$A :='A':$

$c := 57 : a := 27 :$

Da du kender den modstående side til vinkel A og hypotenusen, skal du bruge formlen $\mathrm{Sin}(A) = \frac{a}{c}$ til bestemmelse af vinkel A. Her er først valgt **Solve > Obtain Solution for > A**, og dernæst **Assign to name**.

$$Sin(A) = \frac{a}{c} \xrightarrow{\text{solutions for A}} 28.27371363 \xrightarrow{\text{assign to a name}} A$$

A tildeles (assign) den fundne værdi, så du senere kan referere til A.

Tilsvarende bestemmes vinkel B:

$$Cos(B) = \frac{a}{c} \xrightarrow{\text{solutions for B}} 61.72628637 \xrightarrow{\text{assign to a name}} B$$

Tjek, at du har regnet rigtigt: $A+B+90 = 180.0000000$

Tilbage er blot at bestemme b. Her kan benyttes flere metoder, fx $Cos(A) = \frac{b}{c}$, idet du jo kender A og c:

$$Cos(A) = \frac{b}{c} \xrightarrow{\text{solutions for b}} 50.19960159 \xrightarrow{\text{assign to a name}} b$$

Pythagoras kan bruges til at tjekke, om du har regnet rigtigt (benyt **Test relation**):

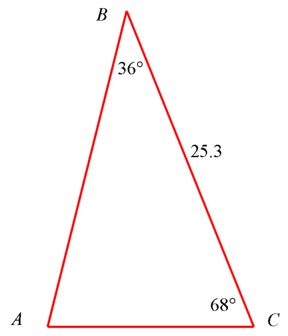
$$a^2+b^2=c^2 \xrightarrow{\text{test relation}} true$$

4.4 Eksempel 3 - bestem sider i en trekant med sinusrelationerne

Beregn de ukendte stykker i trekant ABC når $a = 25.3$, $C = 68°$ og $B = 36°$.

Beregn også trekantens areal.

Model



$a := 25.3 : C := 68 : B := 36 :$

$b :='b': c :='c':$

Først bestemmes $\#A$:

$A := 180 - B - C = 76$

Dernæst benyttes sinusrelationen til at bestemme b:

$$\frac{Sin(A)}{a} = \frac{Sin(B)}{b} \xrightarrow{\text{solutions for b}} 15.32622115 \xrightarrow{\text{assign to a name}} b$$

Tilsvarende bestemmes c:

$$\frac{Sin(A)}{a} = \frac{Sin(C)}{c} \xrightarrow{\text{solutions for c}} 24.17587843 \xrightarrow{\text{assign to a name}} c$$

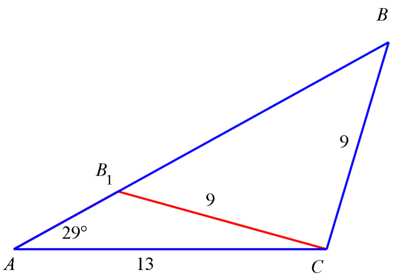
Tilbage er blot at bestemme arealet:

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot Sin(C) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 179.76$$

4.5 Eksempel 4 - bestem vinkler i en trekant med sinusrelationerne

Beregn de ukendte stykker i trekant ABC når $a = 9$, $b = 13$ og $A = 29°$.

Model



Som du kan se af figuren, så er der to muligheder for at tegne denne model, nemlig $\#ABC$ og $\#AB_1C$.

$a := 9 : b := 13 : A := 29 :$

$B :='B': c :='c':$

Start med at bestemme $\#B$ med sinusrelationen

$$\frac{Sin(A)}{a} = \frac{Sin(B)}{b} \xrightarrow{\text{solutions for B}} 44.44951792 \xrightarrow{\text{assign to a name}} B$$

Den anden løsning (på figuren $\#AB_1C$) findes ved

$$B_1 := 180 - B = 135.5504821$$

Der er således også to muligheder for $\#C$:

$$C := 180 - A - B = 106.5504821$$

$$C_1 := 180 - A - B_1 = 15.4495179$$

Tilbage er at bestemme c. Her er også to muligheder:

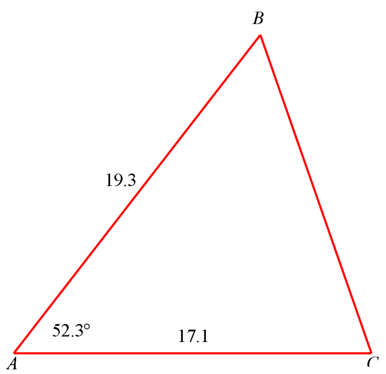
$$\frac{Sin(A)}{a} = \frac{Sin(C)}{c} \xrightarrow{\text{solutions for c}} 17.79486574$$

$$\frac{Sin(A)}{a} = \frac{Sin(C_1)}{c_1} \xrightarrow{\text{solutions for c\_\_1}} 4.945246632$$

4.6 Eksempel 5 - bestem sider i en trekant med cosinusrelationerne

Beregn de ubekendte stykker i trekant ABC når $A = 52.3°$, $b = 17.1$ og $c = 19.3$.

Model



$b := 17.1 : c := 19.3 : A := 52.3 :$

$C :='C': a :='a': B :='B':$

Start med at finde a med cosinusrelationen:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot Cos(A) \xrightarrow{\text{solutions for a}} 16.16339884, -16.16339884 \xrightarrow{\text{select entry 1}} 16.16339884 \xrightarrow{\text{assign to a name}} a$

Til bestemmelse af vinklerne kan du bruge såvel sinusrelationen som cosinusrelationen, men det sikreste er at bruge cosinusrelationen, da den kun giver én brugbar løsning:

$$Cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\, a \cdot b} \xrightarrow{\text{solutions for C}} 70.86783053 \xrightarrow{\text{assign to a name}} C$$

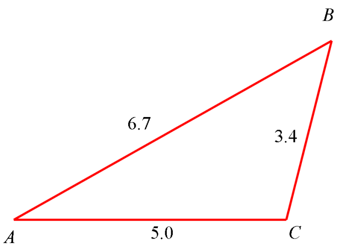
Tilbage er blot at beregne vinkel B:

$B := 180 - A - C = 56.83216947$

4.7 Eksempel 6 - bestem vinkler i en trekant med cosinusrelationerne

Beregn vinkel B i trekant ABC idet $a = 3.4$, $b = 5.0$ og $c = 6.7$.

Model:



$a := 3.4 : b := 5 : c := 6.7 :$

$A :='A': B :='B': C :='C':$

Find $\#B$ vha cosinusrelationen:

$$Cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \xrightarrow{\text{solutions for B}} 46.34625703 \xrightarrow{\text{assign to a name}} B$$

Helt tilsvarende bestemmes $\#A$ og $\angle C$:

$$Cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \xrightarrow{\text{solutions for A}} 29.47190923 \xrightarrow{\text{assign to a name}} A$$

$$Cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \xrightarrow{\text{solutions for C}} 104.1818337 \xrightarrow{\text{assign to a name}} C$$

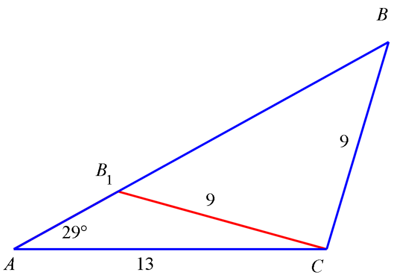
Tjek, at alt er, som det skal være

$A + B + C = 180.0000000$

4.8 Eksempel 7 - det dobbelttydige trekantstilfælde med cosinusrelationen

Beregn de ukendte stykker i trekant ABC når $a = 9$, $b = 13$ og $A = 29°$.

Model



Som du kan se af figuren, så er der to muligheder for at tegne denne model, nemlig $\#ABC$ og $\#AB_1C$. Her skal renses så mange variabler, at det er nemmest at restarte:

restart

$with(Gym)$:

$a := 9 : b := 13 : A := 29 :$

skriv cosinusrelationen op i versionen med $\#A$: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot Cos(A)$, og løs denne med hensyn til c, der er den eneste ubekendte i ligningen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot Cos(A) \xrightarrow{\text{solutions for c}} 4.945246639, 17.79486574 \xrightarrow{\text{to set}} \{4.945246639, 17.79486574\} \xrightarrow{\text{assign to a name}} c$$

I $\#ABC$ kender du nu alle sider, og kan beregne $\#B$:

$$Cos(B) = \frac{a^2 + c_2^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c_2} \xrightarrow{\text{solutions for B}} 44.44951799 \xrightarrow{\text{assign to a name}} B$$

Herefter kan $\#C$ bestemmes

$C := 180 - (A + B) = 106.5504820$

Da $\#B_1BC$ er ligebenet er $\angle CB_1B = \angle B$.

Derfor er $\angle AB_1C = 180 - B = 135.5504820$

Til slut kan vi udregne $\#\mathrm{A}CB_1 = 180 - (28 + 180 - B) = 16.44951799$

5 Funktioner

5.1 Regneforskrift

En funktion som fx $f(x) = 2x - 1$ defineres i Maple:

$f := x \rightarrow 2x - 1$

$$x \rightarrow 2x - 1 \tag{5.1}$$

og skal forstås således: f er funktionens navn, og funktionen er defineret ved, at ethvert x afbildes i $2x - 1$.

Pilen $\rightarrow$ skrives lettest med genvejen ->, hvor du taster bindestreg (-) efterfulgt af større ned (>).

Du kan naturligvis også benytte skabelonen i Expression-paletten:

$$f := a \rightarrow y$$

hvor du benytter Tab-knappen for at navigere fra pladsholder til pladsholder.

Lad os se, om funktionen fungerer som den skal:

$f(2) = 3$

$f(5) = 9$

Men du kan sætte alle mulige udtryk ind i funktionen f i stedet for x:

$f(u) = 2u - 1$

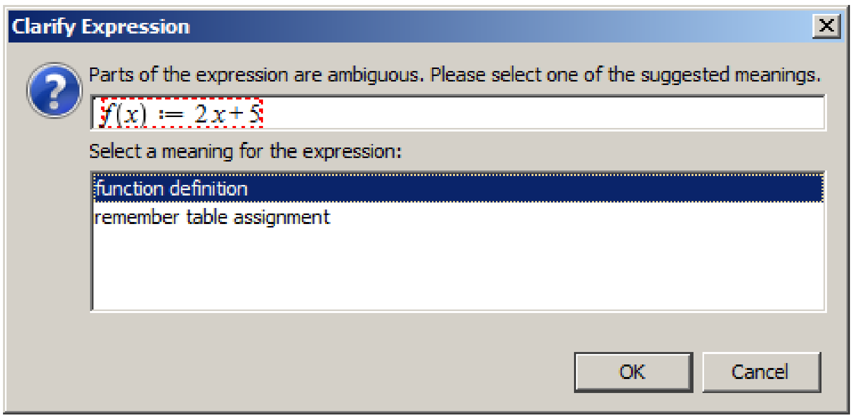
$f(2u + 3) = 4u + 5$

Definition med :=

Hvis du benytter syntaksen for funktionsdefinition fra andre CAS-værktøjer:

$f(x) := 2x + 5$

så behøver Maple en afklaring. Problemet er, at her står, at $f(x)$ er et navn for udtrykket $2x + 5$. Men da navne ikke må indeholde parenteser og andre specialtegn (bortset fra underscore), giver definitionen ikke umiddelbart mening, og denne dialog vil altid komme frem:



hvor Maple tilbyder dig at opfatte det skrevne som en funktionsdefinition.

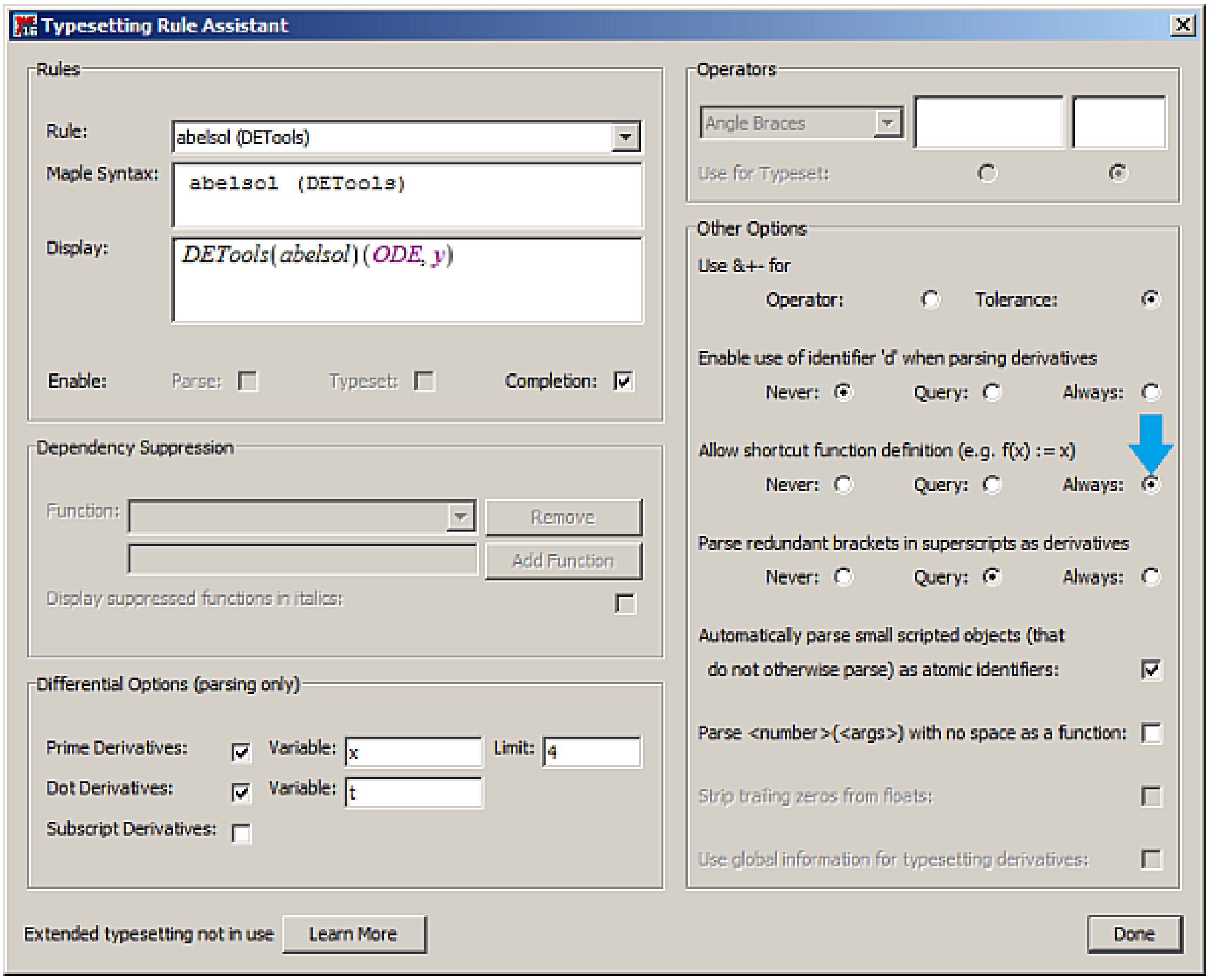
Hvis du trykker på OK, vil Maple svare $x \rightarrow 2x + 5$.

Hver gang du genberegner dit ark, vil denne dialog poppe op, og du skal trykke på OK (ved at trykke Enter). For at slippe for det (det bliver ret irriterende i længden) anbefales det, at du benytter en definition, som Maple straks forstår - dvs.: $f := x \rightarrow 2x + 5$.

Tip:

Du kan få Maple til altid at acceptere en funktionsdefinition som $f(x) := 2x + 5$, uden at du vil blive afkrævet en forklaring.

Gå til menupunktet View > Typesetting Rules... Dette vil åbne denne dialogboks



Klik i radioknappen ved always (under den blå pil), og du vil aldrig mere blive afkrævet en forklaring på funktionsdefinitioner som $f(x) := 2x + 5$.

Eksempel

Definer en funktion ved $g(x) = 2x^2 - 4x + 7$. Udregn følgende værdier:
$g(0)$, $g(3 + h)$ og $g(x + h)$

$g := x \to 2x^2 - 4x + 7$

$$x \to 2x^2 - 4x + 7 \tag{5.2}$$

$g(0) = 7$

$g(3 + h) = 2(3 + h)^2 - 5 - 4h$

$g(x + h) = 2(x + h)^2 - 4x - 4h + 7$

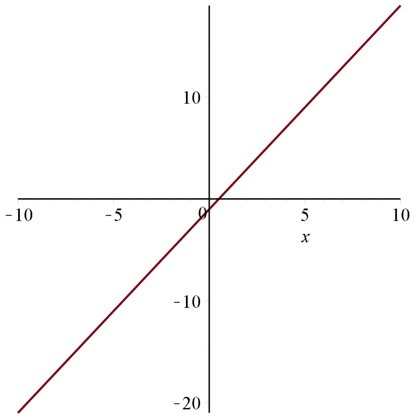
5.2 Graftegning

Grafen for funktionen f tegner du sådan her:

x-intervallet vil automatisk være $[-10, 10]$
$f := x \to 2x - 1$

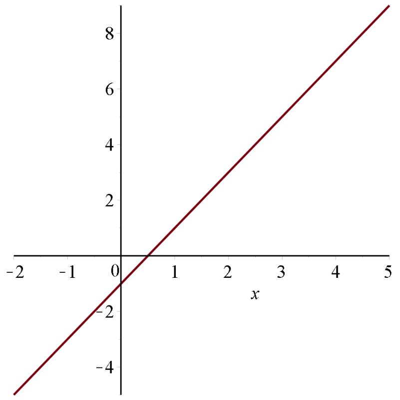
$$x \to 2x - 1 \tag{5.3}$$

$plot(f(x))$

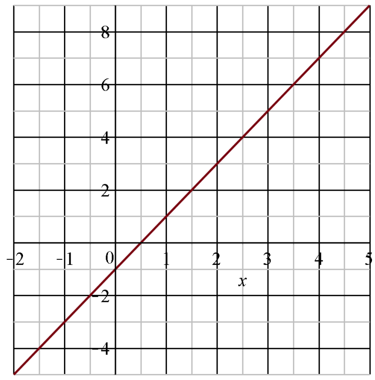


Hvis du vil have et andet x-interval fx $[-2, 5]$ er kommandoen denne, hvor der mellem -2 og 5 er to punktummer:

$plot(f(x), x = -2..5)$



Ofte er det at ønskeligt at have et 'gridnet' (kan være et kvadratet, hvis enhederne på akserne er de samme). Dette kan klares i en snæver vending ved at klikke i grafen og dernæst klikke på knappen **Toggle gridlines**:



Hvis du vil tegne flere grafer i samme koordinatsystem, skal du samle funktionerne med kantede parenteser [ ]. Lad os se på et eksempel, hvor vi også styrer farven på graferne.

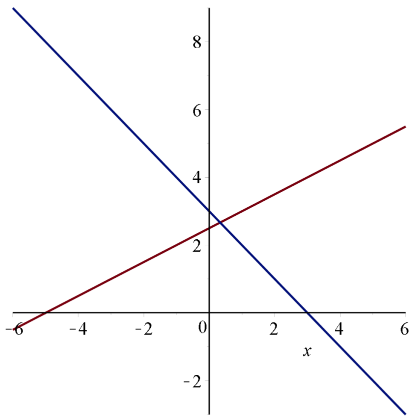
$f := x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

$$x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \tag{5.4}$$

$g := x \rightarrow -x + 3$

$$x \rightarrow -x + 3 \tag{5.5}$$

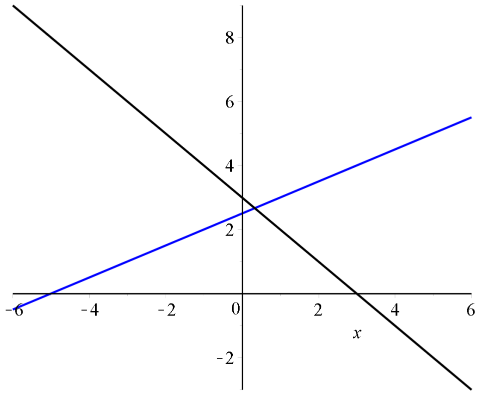
$plot([f(x), g(x)], x = -6..6)$



Hvis du vil have andre farver på dine grafer, så kan du højreklikke på en af graferne og vælge color i menuen.

Det er ikke helt uproblematisk at benytte farver fra menuen, idet en genberegning vil få farverne skifte til standard. Det kan du undgå ved at 'hard-code' farven:

$plot([f(x), g(x)], x=-6..6, color=[blue, black])$



Du kan finde en liste over farver ved at gå til Help-menu, eller blot skrive (efterfulgt af Enter)

$?colornames$

Du finder et væld af muligheder til formatering af et plot ved at højreklikke på grafen.

Hvis du vil aflæse punkter på dine grafer, så finder du et værktøj til dette ved at højreklikke i plottet og vælge **Probe Info...> Cursor Position** (eller en af de andre muligheder). Eksperimenter!

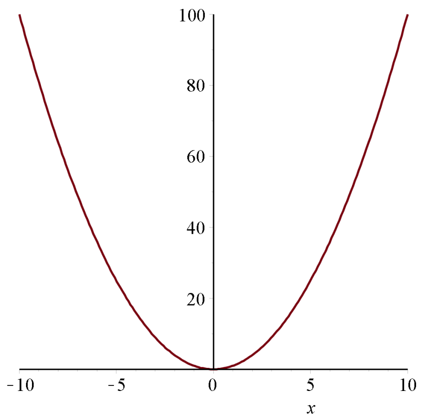
5.3 Nogle elementære funktioner

Vi skal tegne følgende funktioner

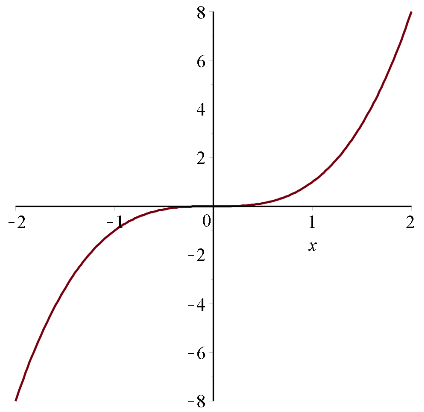
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Vi vil tegne graferne i hvert sit koordinatsystem. De tre første funktioner er helt uproblematiske. Da vi ikke skal bruge funtionerne til andet end til at se deres grafer, skriver vi funktionsudtrykket direkte ind i plot-kommandoen uden at definere en egentlig funktion.

$plot(x^2)$

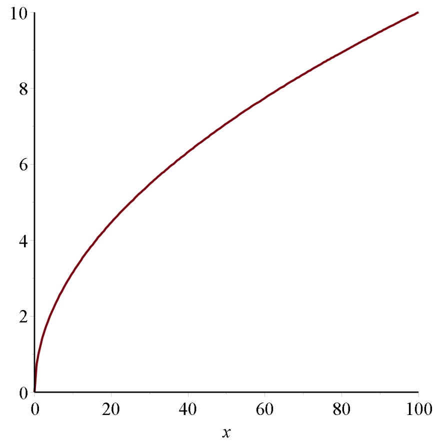


$plot(x^3, x = -2..2)$



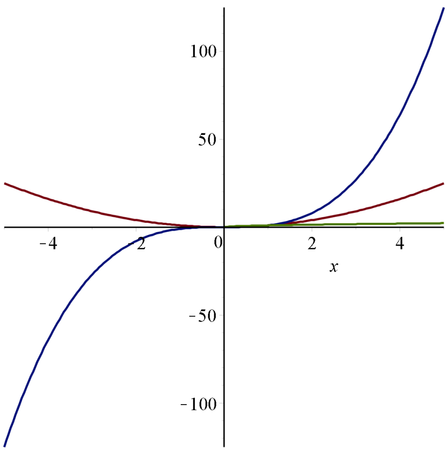
Her er x-intervallet ændret, så vi kan få et mindre y-inerval, der i standardindstillingen vil være fra $[-1000, 1000]$.

$plot(\sqrt{x}, x=0..100)$



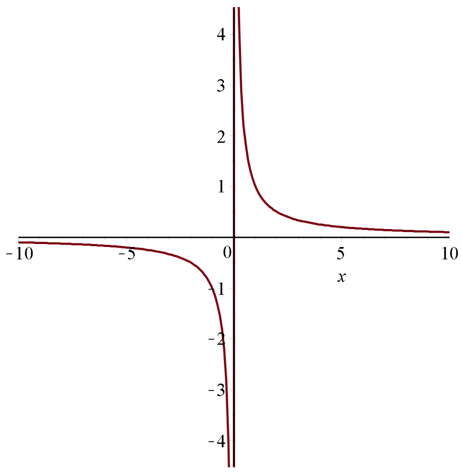
Her er x-intervallet ændret for at afspejle, at $\sqrt{x}$ kun er defineret i $[0,\infty[$

$plot([x^2, x^3, \sqrt{x}], x=-5..5)$



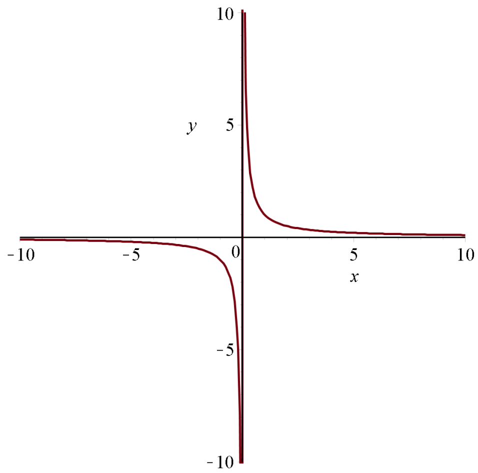
Hvis du skal tegne funktionen for $f(x) = \frac{1}{x}$ i intervallet $[-10, 10]$ bliver resultatet ikke overbevisende:

$plot\left(\frac{1}{x}\right)$



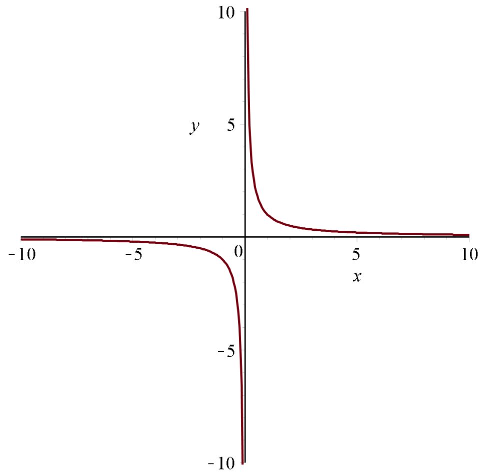
Problemet er, at for x-værdier tæt ved 0 bliver y-værdierne enormt store. Du har mulighed for at begrænse y-intervallet til fx $[-10, 10]$ sådan her:

$plot\left(\frac{1}{x}, x=-10..10, y=-10..10\right)$



- og så ligner det jo mere den velkendte hyperbel. Eneste problem er, at y-aksen er rød, fordi et punkt langt nede i 3. kvadrant forbindes med en punkt langt opp i 1. kvadrant. Dette kan forhindres således:

$plot\left(\frac{1}{x}, x = -10..10, y = -10..10, discont = true\right)$



5.4 Udforskning af andengradspolynomier

Øvelse 1

Start med at definere funktionen
$f := x \rightarrow x^2$

$$x \rightarrow x^2 \tag{5.6}$$

og tegn grafen for f i intervallet $[-5, 5]$.

Indtegn i samme koordinatsystem funktionerne

$f_1(x) = 2x^2, f_2(x) = \frac{1}{2}x^2, f_3(x) = -x^2, f_4(x) = -2x^2, f_5(x) = \frac{1}{2}x^2$

Den sænkede skrift er et literal indeks (laves med f __1).

Forklar ud fra de tegnede grafer, betydningen af koefficienten a i funktionen $f(x) = a \cdot x^2$.

Øvelse 2

Start med at definere funktionen

$f := x \rightarrow x^2$

$$x \rightarrow x^2 \tag{5.7}$$

og tegn grafen for denne i intervallet $[-5, 5]$.

Indtegn i samme koordinatsystem funktionerne

$f_1(x) = x^2 + 3, f_2(x) = x^2 - 3, f_3(x) = 2x^2 + 2, f_4(x) = -2x^2 + 2$

Forklar ud fra denne undersøgelse, hvordan grafen for en funktion af typen $g(x) = a \cdot x^2 + c$, hvor $a \neq 0$, og c er et vilkårligt reelt tal, fremkommer af grafen for $f(x) = a \cdot x^2$.

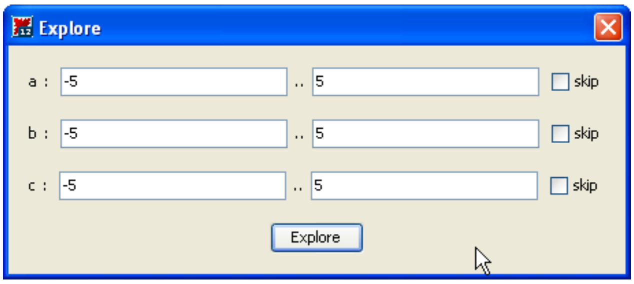
6 Andengradspolynomier og andengradsligninger

6.1 Udforsk andengradspolynomiet med Explorer Assistant

Øvelse

$Explore\left(plot\left(a \cdot x^2 + b \cdot x + c, x = -10 ..10, y = -10 ..10\right)\right)$

Tast Enter efter ovenstående kommando. Så vil dette vindue komme frem:



Udfyld som vist, og klik på Explore-knappen. Et Explorer Assistant vindue vil komme frem (som et nyt Maple dokument). Fra starten af ser du ingen graf.

Træk i skyderne, og følg nøje med i, hvad der sker med grafen.

Tip:

Hvis du gerne vil studere, hvad der sker, hvis $-1 < a < 1$, så kan du erstatte a med $\frac{a}{10}$, og lade a-intervallet i Explore vinduet løbe fra -10 til 10.

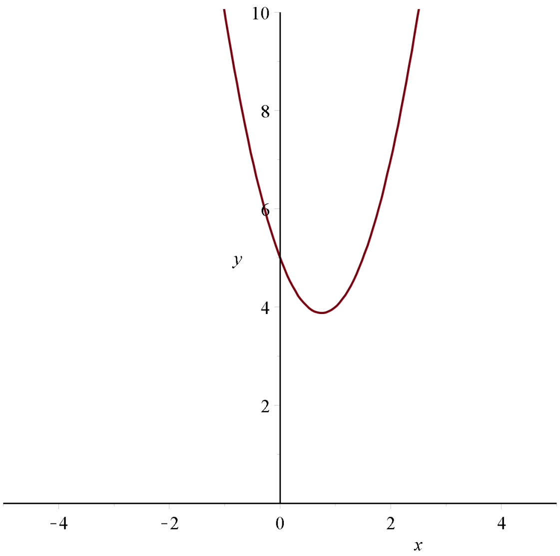
6.2 Toppunktbestemmelse

Til bestemmelse af toppunktet for en parabel har vi en formel, der stort set kun kræver korrekt aflæsning af koefficienterne i andengradspolynomiet og indsættelse i en formel.

Lad os se på et eksempel - og vi tegner lige grafen inden vi går i gang med toppunktsbestemmelsen:
$f := x \rightarrow 2x^2 - 3x + 5$

$$x \rightarrow 2x^2 - 3x + 5 \tag{6.1}$$

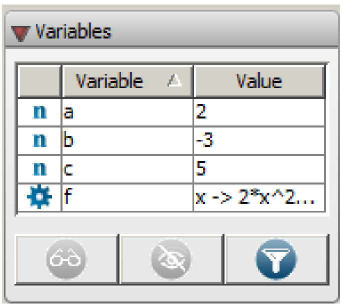
$plot(f(x), x = -5 ..5, y = 0 ..10)$



Koefficienterne aflæses og værdierne tildeles variablerne a, b og c:
$a := 2; b := -3; c := 5$

$$2$$
$$-3$$
$$5 \tag{6.2}$$

Hvis du vil undgå output fra disse tildelinger, kan du erstatte semikolon med kolon. Følg med i **Variables** paletten og tjek, at du får dine variabler defineret.



Herefter kan d beregnes, og alt er klar til at blive puttet ind i formlen:

$d := b^2 - 4 \cdot a \cdot c = -31$

$T := \left[-\frac{b}{2\,a}, -\frac{d}{4\,a}\right] = \left[\frac{3}{4}, \frac{31}{8}\right]$

Øvelse

Find toppunkterne for parablerne:

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3\,x + 1$

2. $g(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2\,x - 4$

3. $h(x) = -3x^2 - 7$

4. $k(x) = x^2 - \frac{2}{13}x$

Facit

1. $\left(-3, -\frac{7}{2}\right)$

2. $\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$

3. $(0, -7)$

4. $\left(\frac{1}{13}, -\frac{1}{169}\right)$

6.3 Toppunktsbestemmelse - Automatiseret beregning

Det 'kritiske' i ovenstående metode til beregning af toppunktet er, at du selv skal aflæse koefficienterne i andengradspolynomiet. Her *kan* der opstå fejl.

I beregningen nedenfor er dette automatiseret vha. Maple-funktionen *coeff*.

Her skal du blot skifte funktionsudtrykket ud med et andet, og genberegne (tryk Enter efter hver linje - eller marker alt, du vil have genberegnet, og tryk på **!**.

$f := x \to \frac{3}{4}x^2 + 2x - 4$

$$x \to \frac{3}{4}x^2 + 2x - 4 \tag{6.3}$$

$a := coeff(f(x), x, 2) = \frac{3}{4}$

$b := coeff(f(x), x, 1) = 2$

$c := coeff(f(x), x, 0) = -4$

$d := b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 16$

$T := \left[-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right] = \left[-\frac{4}{3}, -\frac{16}{3}\right]$

Øvelse

Check, om du har regnet rigtigt i øvelsen i ovenstående afsnit. Du kan blot copy&paste funktionsudtrykket til **(6.1)**, og genberegne a, b, c, d og T. Det gør du ved at markere de 5 linjer og trykke på **!**.

6.4 Faktoropløsning af andengradspolynomiet

Faktoropløsning går helt af sig selv. Maple finder selv ud af, om der er 1, 2 eller ingen rødder i andengradsudtrykket. Du skal blot indsætte funktionsudtrykket i *factor*:

Først faktoropløsning af et andengradspolynomium med **to rødder**:

$f := x \to \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

$$x \to \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \tag{6.4}$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \overset{\text{factor}}{=} \frac{1}{2}(x-2)(x-4)$

Hvis der **kun er én rod** bliver faktoropløsningen:

$g := x \rightarrow -3x^2 + 12x - 12$

$$x \rightarrow -3x^2 + 12x - 12 \tag{6.5}$$

$g(x) = -3x^2 + 12x - 12 \overset{\text{factor}}{=} -3(x-2)^2$

Og i det tilfælde, hvor der **ingen rødder** er, returneres blot det oprindelige udtryk:

$h := x \rightarrow x^2 + x + 1$

$$x \rightarrow x^2 + x + 1 \tag{6.6}$$

$h(x) = x^2 + x + 1 \overset{\text{factor}}{=} x^2 + x + 1$

6.5 CAS - beviser (Avanceret)

Toppunktsformlen

restart

$f := x \rightarrow a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$x \rightarrow a x^2 + b x + c \tag{6.7}$$

På figuren nedenfor er tegnet grafen for f. Af figuren ses, at parablen er symmetrisk omkring den lodrette linje gennem toppunktet.Parablen skærer y-aksen i punktet $(0, c)$. Dette ses ved at udregne $f(0)$:

$f(0) = c$

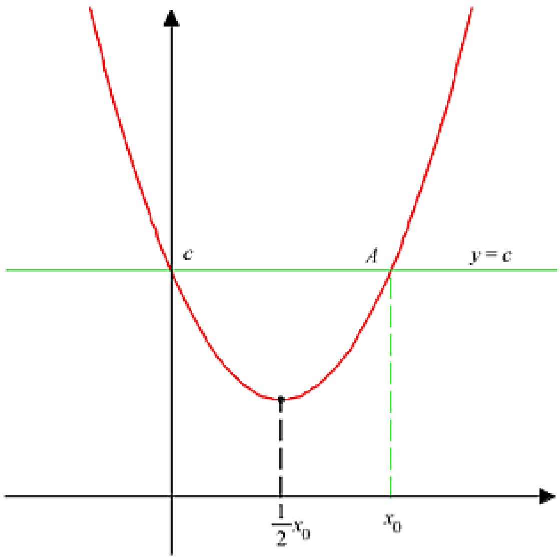
Den vandrette linje $y = c$ gennem $(0, c)$ skærer parablen i et andet punkt A. y-koordinaten til A er c, og lad os kalde x-koordinaten for x_0. Der må da gælde, at $f(x_0) = c$, så for at finde et udtryk for x-koordinaten løser vi ligningen $f(x_0) = c$:

OBS: x_0 Den sænkede skrift laves med x__0

$solve(f(x_0) = c, x_0)$

$$0, -\frac{b}{a} \tag{6.8}$$

Dvs., at $x_0 = -\frac{b}{a}$. Se figuren nedenfor.



Toppunktets x-koordinat er således $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{b}{a} \right) = -\frac{b}{2a}$.

For at finde y-koordinaten til toppunktet indsættes $-\frac{b}{2a}$ i forskriften for f:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{1}{4}\frac{b^2}{a} + c \overset{\text{simplify}}{=} \frac{1}{4}\frac{4ac - b^2}{a}$$

For at få dette til at ligne den rigtige formel, skal vi erstatte tælleren $-b^2 + 4ca$ med $-d$. Hermed har vi vist toppunktsformlen $T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$.

Andengradsligningen

Vi navngiver andengradsligningen og giver et nyt navn hver gang der er foretaget en omformning.
$eq := a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{6.9}$$

Først trækker vi c fra på begge sider:

$$eq_1 := eq - c \overset{\text{simplify}}{=} ax^2 + bx = -c$$

Så ganger vi med $4a$ på begge sider (og kalder den nye ligning for eq_2). Vi benytter expand for at få $4a$ ganget ind i parentesen:

$$eq_2 := expand(4a \cdot eq_1) \overset{\text{simplify}}{=} 4a^2x^2 + 4abx = -4ca$$

b^2 lægges til på begge sider (og den nye ligning kaldes eq_3)

$$eq_3 := eq_2 + b^2 \overset{\text{simplify}}{=} 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

Nu skal vi have indsat $d = b^2 - 4a \cdot c$ på højresiden i eq_3. Det er lidt besværligt at få Maple til det, så vi kan gøre det manuelt eller benytte kommandoen

$$eq_4 := algsubs(b^2 - 4 \cdot a \cdot c = d, eq_3) \overset{\text{simplify}}{=} 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d$$

Venstresiden i *eq4* omskrives til kvadratet på en toledet størrelse:

$$eq_5 := factor(eq_4) \overset{\text{simplify}}{=} (2\,a\,x + b)^2 = d$$

Vi deler nu op i tre tilfælde:

Tilfælde 1: $d > 0$

$solve(eq_5, x)$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-b + \sqrt{d}}{a},\ \frac{1}{2}\,\frac{-b - \sqrt{d}}{a} \qquad (6.10)$$

I dette tilfælde er der altså to løsninger

Tilfælde 2: $d = 0$

$d = 0$ indsættes i eq_5:

$$eq_6 := subs(d = 0, eq_5) \overset{\text{simplify}}{=} (2\,a\,x + b)^2 = 0$$

$solve(eq_6, x)$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{b}{a},\ -\frac{1}{2}\,\frac{b}{a} \qquad (6.11)$$

Og vi ser, at her er én løsning.

Tilfælde 3: $d < 0$

Her er ingen løsninger, idet $(2\,a\,x + b)^2$ aldrig kan blive negativ.

Faktoropløsning

Hvis andengradspolynomiumet $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ har rødderne r_1 og r_2, så kan det faktoropløses som $f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$

Sæt

$$r_1 := \frac{-b + \sqrt{d}}{2\,a}:$$

$$r_2 := \frac{-b - \sqrt{d}}{2\,a}:$$

Så er

$a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) =$

$$a\left(x - \frac{1}{2}\,\frac{-b + \sqrt{d}}{a}\right)\left(x - \frac{1}{2}\,\frac{-b - \sqrt{d}}{a}\right) \overset{\text{expand}}{=} a\,x^2 + b\,x + \frac{1}{4}\,\frac{b^2}{a} - \frac{1}{4}\,\frac{d}{a} \xrightarrow{\text{evaluate at point}} a\,x^2 + b\,x + \frac{1}{4}\,\frac{b^2}{a} - \frac{1}{4}$$

Hvor **Evaluate at a Point** er benyttet til at indsætte $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

Hvis andengradspolynomiumet $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ har kun har én rod, r, kan det faktoropløses som $f(x) = a \cdot (x - r)^2$:

Sæt

$$r := -\frac{b}{2\,a}:$$

Så er

$$a \cdot (x - r)^2 = a\left(x + \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\right)^2 \overset{\text{expand}}{=} a\,x^2 + b\,x + \frac{1}{4}\,\frac{b^2}{a}$$

Vi mangler blot at vise, at $\frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{a} = c$. Dette følger imidlertid af, at $d = b^2 - 4\,a \cdot c = 0$ i dette tilfælde, hvor der kun er én rod. Ved at isolere c får vi:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \xrightarrow{\text{isolate for c}} c = \frac{1}{4}\,\frac{b^2}{a}$$

Hvilket skulle vises.

7 Logaritmefunktioner

7.1 Titalslogaritmen log

Titalslogaritmen til et positivt tal a defineres som

$$\log(a) = \text{‘den eksponent 10 skal opløftes til for at give a’}$$

Fx er log(10) = 1, fordi den eksponent, 10 skal opløftes til, for at give 10, er 1 — altså $10^1 = 10$.

På samme måde fås log(100) = 2, fordi $10^2 = 100$. Vi kan lave en tabel:

a	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
$\log(a)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Bestem $\log(2)$:

Skal du med denne definition finde fx $\log(2)$, er du nødt til på en eller anden måde at finde en passende eksponent, så 10 opløftet til denne eksponent giver 2. Der er flere måder at gøre dette på:

Metode 1

Af tabellen ser du, at $10^0 = 1$ og $10^1 = 10$, så det søgte tal må ligge mellem 0 og 1. Prøv så med 0.5: $10^{0.5} =$
3.162277660

men det er for meget.

Prøv så med 0.25:

$10^{0.25} = 1.778279410$

— for lidt. Prøv selv her ved at indtaste nye værdier i eksponenten, og prøv, om du kan ramme 2:

Før eller siden kommer du frem til, at

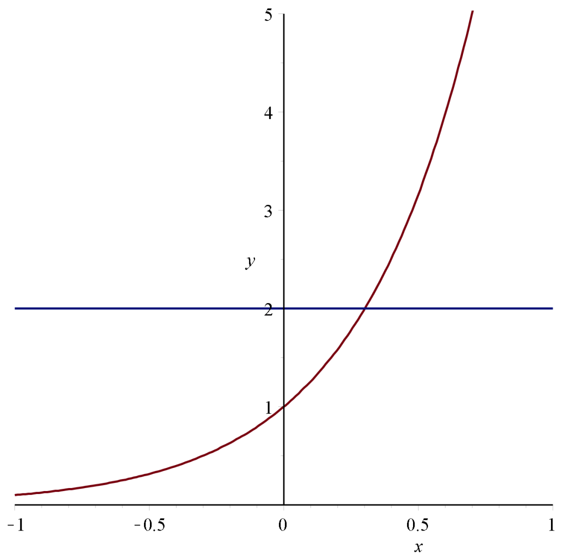
$10^{0.301} = 1.999861870$

— stadig for lidt, men du er tæt på, så $\log(2) \approx 0.301$.

Metode 2

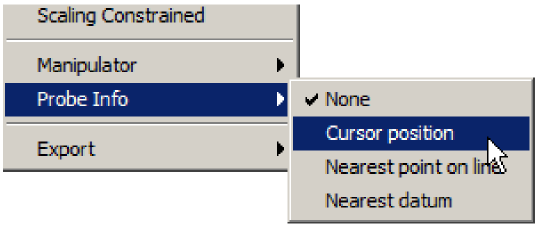
Prøv så med en grafisk tilgang. Tegner du graferne for $y = 10^x$ og $y = 2$, må skæringspunktet for disse være den søgte værdi for $\log(2)$.

$plot([10^x, 2], x=-1..1, y=0..5)$

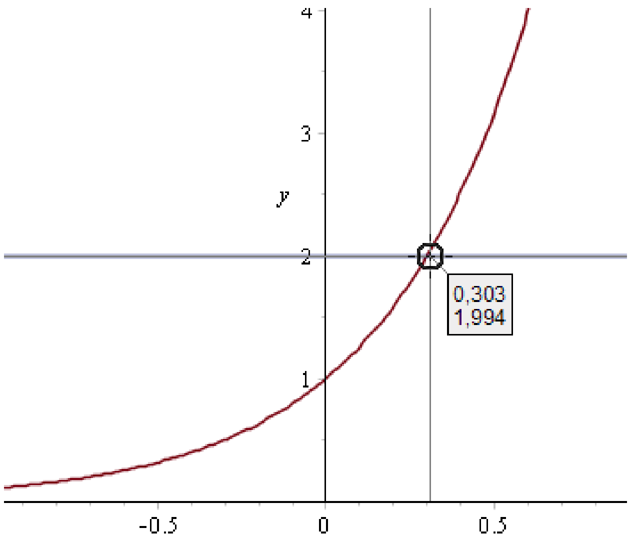


Klik på grafen ovenfor, og sørg for, at sigtekornet er valgt:

Højreklik (Mac: cmd+klik) nu i grafen, og vælg **Probe Info > Cursor Position**



Du kan så bruge sigtekornet til at aflæse med. Det kommer til at se nogenlunde sådan ud:



Du kan aflæse skæringspunktet til ca. $(0.30, 2)$. Du kan lave en bedre aflæsning ved at zoome og panorere:

Klik i grafen. Så kommer denne værktøjslinje frem

Klik på knappen  og rul med musen, så skaleres akserne. Hvis skæringspunktet herved forsvinder fra vinduet, klikker du på knappen , og trækker grafen, så skæringspunktet igen falder inden for vinduet.

Du ophæver Probe Info igen ved at vælge **Probe Info > None**

Metode 3

At finde en eksponent, så 10 opløftet til denne eksponent giver 2, er det samme som at løse ligningen $10^x = 2$ med hensyn til x.

Til denne opgave kan du benytte Maple. Du kan benytte solve, men den vil finde en symbolsk løsning (som vi ikke rigtigt forstår nu), så sæt et punktum efter 2 — det er en ganske smart måde at tvinge Maple til at regne numerisk:

$solve(10^x = 2., x)$

$$0.3010299957 \tag{7.1}$$

Altså er $\log(2) \approx 0.3010$

Definition af log

Af metode 3 ovenfor følger, at vi i Maple terminologi kan definere log som funktionen (navnet λ er kun midlertidigt):

$\lambda := a \rightarrow solve(10^x = a, x)$

$$a \rightarrow solve(10^x = a, x) \tag{7.2}$$

hvilket netop udtrykker, at funktionsværdien i a (dvs. logaritmen til a) findes ved at løse ligningen $10^x = a$.

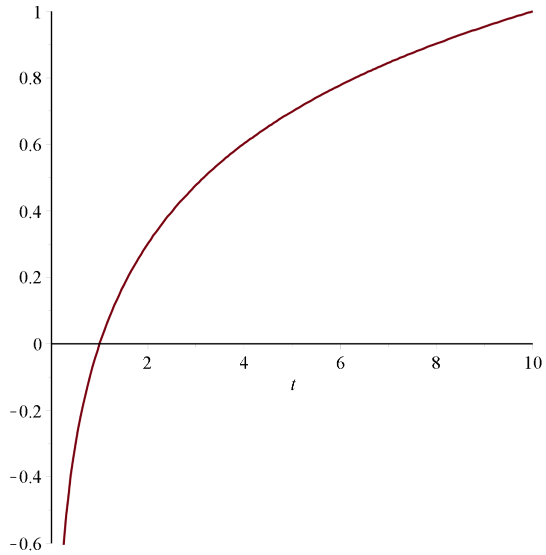
Lad os checke, at det virker:

$\lambda(10) = 1$

$\lambda(100) = 2$

$\lambda(2.) = 0.3010299957$

Du kan naturligvis også tegne grafen for λ:
$plot(\lambda(t), t = 0..10)$



Funktionen λ betegnes almindeligvis med log, der er en forkortelse af logaritme. Funktionen er indbygget i Maple under navnet $\log_{10}(x)$ — og det skal du skrive.

I Expression paletten finder du en skabelon til at skrive dette, men det nemmeste er at indtaste som log_10→(x), hvor → her betegner 'pil-højre' tasten.

7.2 2-talslogaritmen - Øvelse

Definer Totalslogaritmen ved

$$\tau(a) = \text{‘den eksponent 2 skal opløftes til for at give a’}$$

1.

Udfyld tabellen

a	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8
$\tau(a)$				0	1		

I Maple er funktionen τ tilgængelig som $\log_2(x)$. Benyt denne til at kontrollere værdierne i din tabel

2.

Du har nu set konstruktionen af to logaritmefunktioner, nemlig $\log_{10}(x)$ og $\log_2(x)$. Tallet 10 og 2 hhv.kaldes for logaritmefunktions **grundtal**. For hvilke grundtal kan du konstruere en logaritmefunktion ?

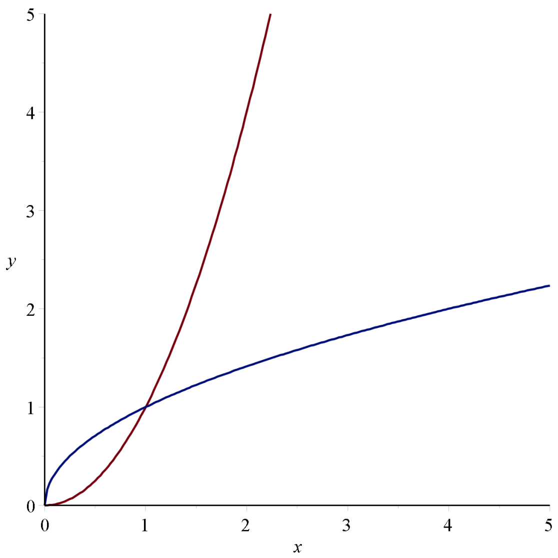
3.

Funktionerne x^2 og $\sqrt{x}$ ophæver hinanden for positive x-værdier:

$$\sqrt{x^2} = x \text{ og } \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

derfor kaldes $\sqrt{x}$ den omvendte funktion til x^2 — og omvendt. Tag et kig på grafenerne for de to funktioner. Hvad ser du?

$plot\left(\left[x^2, \sqrt{x}\right], x=0..5, y=0..5\right)$



Argumenter for, at funktionen $\log_{10}(x)$ er den omvendte til 10^x — og omvendt. Tag også her et kig på graferne. Ser du det samme?

7.3 Eksperiment: Hvad er e ?

På lånekontrakter mv. ser man ofte en vending i stil med:

Den årlige rente er 8% (nominel) med kvartalsvis rentetilskrivning

Det betyder, at der tilskrives 2% i rente pr. kvartal. Men at tilskrive 2% i rente 4 gange, er ikke det samme som at tilskrive 8% i rente én gang:

Tilskrives 8% i rente én gang, bliver beløbet efter ét år:

$K_0 \cdot (1+0.08)^1 = 1.08\, K_0$

Tilskrives 2% i rente hvert kvartal, bliver beløbet efter et år:

$K_0 \cdot (1+0.02)^4 = 1.08243216\, K_0$

hvilket svarer til 8.24% i rente. Dette kaldes den effektive rente. De 0.24%, renten er blevet større,skyldes, at den rente, der er tilskrevet undervejs, også giver rente.

Du skal nu bestemme:

den effektive årlige rente svarende til 100% nominel rente med kontinuert rentetilskrivning

Situationen er den samme som ovenfor — blot har vi her en årlig rente på 100%. Denne rente deles ligeligt ud på det antal rentetilskrivninger, vi måtte ønske. Ønsker vi fx 4 rentetilskrivninger, skal der tilskrives 25% ved hver af de 4 rentetilskrivninger. Deler vi den årlige rentetilskrivning op i n lige store tilskrivninger, bliver den årlige fremskrivningsfaktor:

$$\left(1+\frac{100\,\%}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Med kontinuert rentetilskrivning menes, at der tilskrives renter hvert splitsekund, og i princippet er der jo uendeligt mange af dem i et år, så det er ikke noget, vi umiddelbart kan sætte tal på.

Udfyld dette skema (og brug Maple til beregningerne):

Tilskrivning	Antal tilskrivninger	Formel	Fremskrivnings-faktor
Årlig	1	$K = K_0 \cdot (1+1)^1$	2
Halvårlig	2	$K = K_0 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	2.25
Kvartalsvist	4		
Månedlig	12		
ugevis	52		
daglig	365		
timevis	8760		
minutvist	525600		
sekundvist	31536000		

Tip:

Hvis du skal udregne noget i stil med

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$$

vil du få en kæmpebrøk, der fylder flere skærme - og det kan du ikke bruge til noget her. Vælger du at regne med fx 20 cifre, skal du højre-klikke på udtrykket og vælge Approximate:

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \xrightarrow{\text{at 20 digits}} 2.7169239322358924574$$

Ved beregningen 'sekundvis tilskrivning' kommer du sikkert i problemer. Det skyldes, at der ikke er allokeret plads nok i computerens hukommelse til at rumme tallet. Der sker det, at Maple regner eksakt hele vejen og først til allersidst reduceres til 20 cifre. Ved at begrænse 'indmaden' $1+\frac{1}{n}$ til et vist antal cifre, kan du slippe i gennem.

Konklusion

Som forventet bliver fremskrivningsfaktoren større og større, jo flere rentetilskrivninger vi deler ud på, men til sidst er det ikke ret meget.

Et kig på tallene viser, at første 5 cifre er uændrede i de tre sidste beregninger, så hvis vi udregner for rentetilskrivning hvert tiendedel sekund, må vi forvente, at de 5 første cifre også her er uændrede.

Meget tyder dog på, at når n (antal rentetilskrivninger) bliver uendelig stor, så vil fremskrivningsfaktoren nærme sig et bestemt tal. Det viser sig, at dette tal ingen systematik har i decimalerne, så det kan ikke skrives som en brøk.

Leonhard Euler, der fandt dette tal, kaldte det e. Dette tal kan karakteriseres som den årlige fremskrivningsfaktor ved kontinuert rentetilskrivning, der svarer til 100% nominel årlig rente.

7.4 Den naturlige eksponentialfunktion

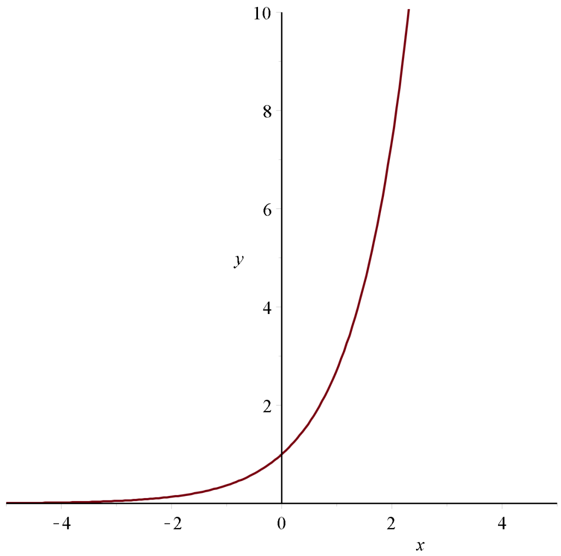
Som ethvert andet positivt reelt tal (forskellig fra 1) kan e (≈ 2.71828) benyttes som grundtal for en eksponentialfunktion.

Funktionen

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \quad x \in R$$

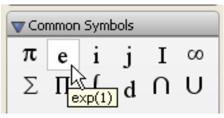
kaldes den *naturlige eksponentialfunktion*.

Grafen for e^x ser således ud
$plot\left(\mathrm{e}^x, x = -5..5, y = 0..10\right)$



Vigtigt:

Når du skal skrive den naturlige logaritmes grundtal e, så må du ikke blot bruge e fra tastaturet. I stedet skal du hente e i Common Symbols paletten



Her kan du i øvrigt også se, at tastaturgenvejen er exp(1).

7.5 Den naturlige logaritme ln

I princippet kan vi definere en logaritmefunktion for ethvert positivt reelt tal forskellig fra 1. Vi skal

blot i definitionen udskifte 10 med et andet positivt reelt tal forskellig fra 1. Specielt vigtig er den logaritmefunktion, der fremkommer, når 10 udskiftes med e = 2.71828...

Den **naturlige logaritme** til et positivt tal a defineres som

$$\ln(a) = \text{‘den eksponent e skal opløftes til for at give } a\text{’}$$

Fx er $\ln(\mathrm{e}) = 1$, fordi den eksponent, e skal opløftes til for at give e, er 1 — altså $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. På samme

måde fås $\ln(\mathrm{e}^2) = 2$. Vi kan lave en tabel:

a	e^{-3}	e^{-2}	e^{-1}	1	e	e^2	e^3
$\ln(a)$	−3	−2	−1	0	1	2	3

Pas på:

Om du i Maple skriver $\log(x)$ eller $\ln(x)$ er ligegyldigt: Begge indtastninger vil blive tolket som $\ln(x)$. Hvis du skal bruge titalslogaritmen, så skal du skrive $\log_{10}(x)$.

Naturligvis kan du også her opfatte $\ln(a)$ som løsningen til ligningen:

$$\ln(a) = \text{‘løsningen til ligningen } \mathrm{e}^x = a \text{ med hensyn til } x\text{’}$$

og definere den ved hjælp af solve:

$\lambda := a \rightarrow solve(\mathrm{e}^x = a, x)$

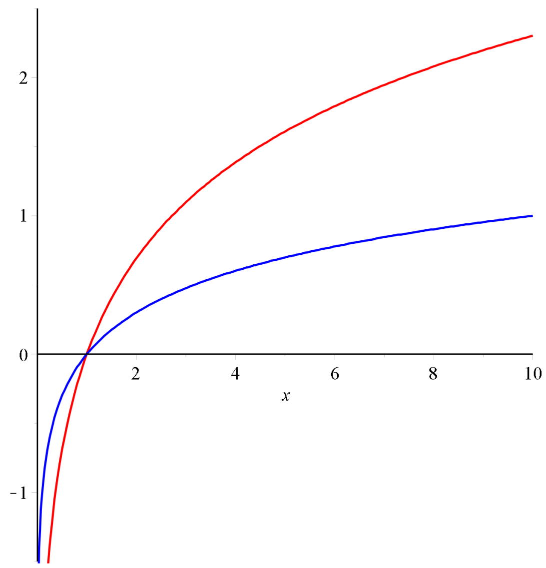
$$a \rightarrow solve(\mathrm{e}^x = a, x) \tag{7.3}$$

$\lambda(a) = \ln(a)$

Her lurer Maple straks, at det er ln, der defineres.

Grafen for $\ln(x)$ ser således ud (her tegnet sammen med grafen for $\log_{10}(x)$ – den røde graf er $\ln(x)$:

$plot([\ln(x), \log_{10}(x)], x = 0..10, color = [red, blue])$



Eksponentielle udviklinger

Du vil ofte se en eksponentiel udvikling skrevet på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$ i stedet for den form, du måske er vant til, $f(x) = b \cdot a^x$.

Du kan ret let skifte mellem de to former — du skal blot benytte, at $e^{\ln(a)} = a$:

$$b \cdot a^x = b \cdot \left(e^{\ln(a)}\right)^x = b \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$$

og

$$b \cdot e^{k \cdot x} = b \cdot \left(e^k\right)^x$$

Fx er

$$f(x) = 3 \cdot 1.27^x = 3 \cdot \left(e^{\ln(3.27)}\right)^x = 3 \cdot e^{1.1848 \cdot x}$$

idet $\ln(3.27) \approx 1.1848$.

Og tilsvarende er

$$f(x) = 2.45 \cdot e^{-0.556 \cdot x} = 2.45 \cdot 0.5735^x$$

idet $e^{-0.556} \approx 0.5735$.

For feinschmeckere

Prøv at løse $10^x = a$ symbolsk med hensyn til x:

$solve\left(10^x = a, x\right)$

$$\frac{\ln(a)}{\ln(10)} \tag{7.4}$$

Løsningen ser lidt underlig ud. Her påstås faktisk, at

$$\log_{10}(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$$

Det kræver et lille argument at indse dette:

For at bestemme $\log_{10}(a)$ skal vi løse $10^x = a$ med hensyn til x. Da $e^{\ln(10)} = 10$ og $e^{\ln(a)} = a$, kan vi omskrive:

$$10^x = a \;\Leftrightarrow\; \left(e^{\ln(10)}\right)^x = e^{\ln(a)} \;\Leftrightarrow\; e^{x \cdot \ln(10)} = e^{\ln(a)} \;\Leftrightarrow\; \ln(a) = x \cdot \ln(10) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$$

som giver det ønskede.

Bemærkning:

Dette viser, at funktionerne $\log_{10}(x)$ og $\ln(x)$ er proportionale med proportionalitetsfaktoren $\frac{1}{\ln(10)} \approx 0.4343$:

$$\log_{10}(a) = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(a)$$

7.6 Eksempler

Eksempel 1

Som et mål for surhedsgraden af en væske benyttes pH-værdien, der defineres som $pH = -\log(c)$, hvor c betegner koncentrationen af H_3O^+ -ionen, og måles i mol/L (mol pr. liter).

a)

Bestem koncentrationen i en væske med $pH = 2.2$.

b)

Gør rede for, at hvis koncentrationen c i en væske gøres 100 gange større, vil pH blive formindsket med 2.

Løsning

a)
$solve\left(2.2 = -\log_{10}(c), c\right)$

$$0.006309573445 \tag{7.5}$$

Dvs., at koncentrationen i en væske med $pH = 2.2$ er 0.0063 mol/L.

b)

Hvis koncentrationen c gøres 100 gange større — dvs. $100 \cdot c$, bliver pH:

$-\log_{10}(100 \cdot c) = -\left(\log_{10}(100) + \log_{10}(c)\right) = -\log_{10}(c) + 2 = pH + 2$

Eksempel 2

I en næringsopløsning kan antallet, $B(t)$, af bakterier t timer efter et forsøgs begyndelse beskrives med:

$$B(t) = 100 \cdot e^{0.468\,t}$$

a)

Hvor mange bakterier er der i opløsningen efter 5 timer ?

b)

Hvor mange procent øges antallet af bakterier pr. time ?

c)

Hvor lang tid går der ifølge modellen før antallet af bakterier er over 12000 ?

d)

Bestem fordoblingstiden.

Løsning:

a)

$B := t \rightarrow 100 \cdot e^{0.468\,t}$

$$t \rightarrow 100\, e^{0.468\,t} \tag{7.6}$$

$B(5) = 1038.123656$

Dette viser, at der er ca. 1038 bakterier i næringsopløsningen efter 5 timer.

b)

Fremskrivningsfaktoren er $e^{0.468}$

$e^{0.468} - 1 = 0.596797403$

Så antallet vil forøges med ca. 60% pr. time.

c)
$solve(B(t) > 12000, t)$

$$RealRange(Open(10.22968321), \infty) \tag{7.7}$$

Dette viser, at efter 10.23 timer vil antallet af bakterier overstige 12000

d)

$T_2 = \frac{\ln(2.)}{\ln(e^{0.468})} = T_2 = 1.481083719$

Så fordoblingstiden er ca. 1.5 time.

Eksempel 3

Styrken af et jordskælv angives ved Richtertallet. Et jordskælv frigiver energi, og for et jordskælv af normal dybde gælder:

$$\log(E) = 2.4 \cdot M - 1.2$$

hvor M er Richtertallet, og E er den frigivne energi målt i kWh.

a)

En atomsprængning på 1 megaton udvikler en energimængde på $1.25 \cdot 10^9$ kWh. Beregn Richtertallet for et jordskælv, der udvikler samme energimængde.

b)

I Chile var der i 1960 en række jordskælv. Disse havde Richtertal 7.5, og et senere havde Richtertal 8.4.

Beregn forholdet mellem de to udviklede energimængder.

Løsning:

a)

Først indsættes $1.25 \cdot 10^9$ for E, og der løses mht. M:

$\log_{10}(E) = 2.4 \cdot M - 1.2 \xrightarrow{\text{evaluate at point}} \frac{20.94640939}{\ln(10)} = 2.4\,M - 1.2 \xrightarrow{\text{solutions for M}} 4.290379172$

Dvs., at Richtertallet 4.3 svarer til en energimængde på $1.25 \cdot 10^9$ kWh.

Energimængden svarende til Richtertal 7.5 og 8.4 bestemmes:

$\log_{10}(E) = 2.4 \cdot 7.5 - 1.2 \xrightarrow{\text{solutions for E}} 6.309573445\,10^{16} \xrightarrow{\text{assign to a name}} E1$

$\log_{10}(E) = 2.4 \cdot 8.4 - 1.2 \xrightarrow{\text{solutions for E}} 9.120108394\,10^{18} \xrightarrow{\text{assign to a name}} E2$

Forholdet mellem de to energimængder bliver:

$\frac{E2}{E1} = 144.5439771$

b) - alternativ løsning

Hvis du isolerer E i ligningen

$$\log_{10}(E) = 2.4 \cdot M - 1.2$$

kan du udtrykke energimængden som funktion af Richtertallet:
$solve\left(\log_{10}(E) = 2.4 \cdot M - 1.2, E\right)$

$$e^{5.526204223\,M - 2.763102112} \tag{7.8}$$

Her får du en løsning udtrykt ved e. Det hænger sammen med, at Maple pr. automatik omskriver $\log_{10}(x)$ til $\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
Regner du ved håndkraft, kan du få et pænere resultat:

$$E = 10^{2.4\,M - 1.2}$$

Definer nu funktionen E ved:
$E := M \rightarrow e^{5.526204223\,M - 2.763102112}$

$$M \rightarrow e^{5.526204223\,M - 2.763102112} \tag{7.9}$$

Så kan opgaven løses ved:

$\dfrac{E(8.4)}{E(7.5)} = 144.5439770$

8 Regression i Maple

8.1 Gym pakken skal indlæses

Gym-pakken indeholder de nødvendige værktøjer til regression. Denne indlæses med kommandoen

$with(Gym)$:

Online hjælpen til Gym-pakken får du frem ved at indtaste

$?Gym$

efterfulgt af Enter

8.2 Lineær Regression

Skemaet viser trykket i forskellige dybder under havoverfladen

Dybde(cm)	10	13	35	40	100
Tryk (atm)	1.96	2.25	4.36	4.84	10.60

Det oplyses, at trykket med god tilnærmelse er en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ af dybden under havoverfladen.

a)

Bestem tallene a og b.

b)

Bestem trykket i en dybde på 150m, og bestem den dybde, hvor trykket er 30atm

---

a)

Indlæs Gym-pakken

$with(Gym)$:

og opskriv de to dataserier som lister med tegnene [og]. Navngiv listerne som vist:
$X := [10, 13, 35, 40, 100]$

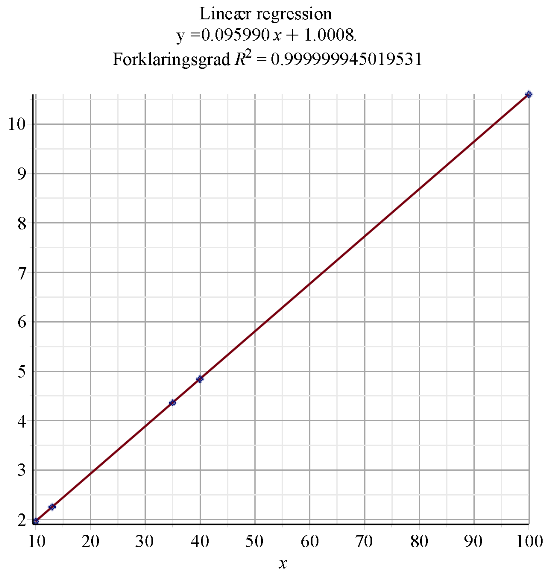
$$[10, 13, 35, 40, 100] \tag{8.1}$$

$Y := [1.96, 2.25, 4.36, 4.84, 10.6]$

$$[1.96, 2.25, 4.36, 4.84, 10.6] \tag{8.2}$$

Lineær regression foretages med kommandoen *LinReg*:

$LinReg(X, Y)$



Heraf ses, at $a = 0.096$ og $b = 1.00$.

b)

For at besvare dette spørgsmål, er det mest hensigtsmæssigt at have modellen udtrykt som en funktion af x. Den kan du naturligvis definere direkte som (hvor du tager regressionsudtrykket fra figuren ovenfor)

$f := x \rightarrow 0.096\,x + 1.00$

$$x \rightarrow 0.096\,x + 1.00 \tag{8.3}$$

eller sådan her

$f := x \rightarrow LinReg(X, Y, x)$

$$x \rightarrow Gym\text{:-}LinReg(X, Y, x) \tag{8.4}$$

Trykket i dybden 150m kan da bestemmes således:

$f(150) = 15.3992819614711$

Dvs., at trykket i en dybde på 150m er 15.4 atm.

Hvis det blot er en funktionsværdi, du skal bestemme, kan du indsætte direkte i $LinReg(X, Y, x)$:

$LinReg(X, Y, 150) = 15.3992819614711$

Den dybde, hvor trykket er 30atm, bestemmes ved at løse ligningen:

$f(x) = 30 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 302.1068588\}$

Dvs., at i en dybde på 302m er trykket 30 atm.

.

.

8.3 Eksponentiel Regression

Tabellen viser antallet af tankstationer i Danmark på forskellige tidspunkter

År	1975	1980	1985	1990	1995
Antal	5205	4397	3622	3031	2647

Det oplyses, at antallet af tankstationer med god tilnærmelse er en eksponentielt aftagende funktion $f(x) = b \cdot a^x$ af antal år efter 1975.

a)

Bestem a og b i forskriften

b)

Giv et skøn over antallet af tankstationer i 2005, hvis den eksponentielle udvikling fortsætter.

a)

Indlæs Gym-pakken

$with(Gym)$:

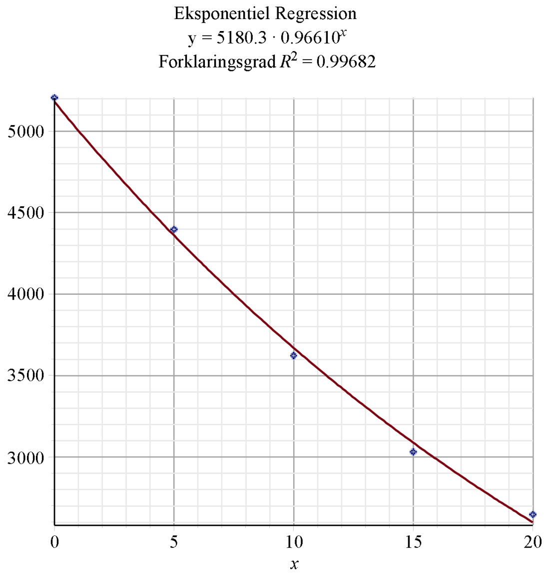
og opskriv de to dataserier som lister med tegnene [og]. Navngiv listerne som vist:

$X := [0, 5, 10, 15, 20]$:

$Y := [5205, 4397, 3622, 3031, 2647]$:

Komandoen *ExpReg* udfører en eksponentiel regression på de to dataserier:

$ExpReg(X, Y)$



Heraf ses, at $a = 0.966$ og $b = 5180$.

b)

For at besvare dette spørgsmål, er det mest hensigtsmæssigt at have modellen udtrykt som en funktion af x. Den kan du naturligvis definere direkte som

$f := x \to 5180 \cdot 0.966^x$

$$x \to 5180\ 0.966^x \tag{8.5}$$

eller som

$f := x \to ExpReg(X, Y, x)$

$$x \to Gym\text{:-}ExpReg(X, Y, x) \tag{8.6}$$

og herefter beregne $f(30)$:

$f(30) = 1835.031621$

Dette viser, at i 2005 vil der være 1840 tankstationer, hvis modellen holder.

8.4 Potens Regression

Tabellen viser for en bestemt type gasledning sammenhængen mellem gasstrøm, målt i m^3 pr time, og tryktab pr. meter ledning, målt i millibar:

Gasstrøm	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	8.0	10.0
Tryktab	0.002	0.008	0.033	0.074	0.130	0.204	0.294	0.522	0.816

Det oplyses, at tryktab pr. meter ledning som funktion af gasstrømmen med god tilnærmelse er en funktion af formen $f(x) = b \cdot x^a$.

a)

Bestem tallene a og b.

a)

Indlæs Gym-pakken

$with(Gym)$:

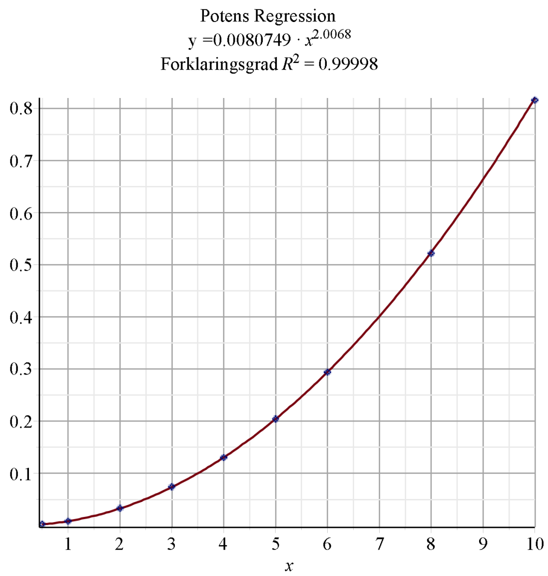
og opskriv de to dataserier som lister med tegnene [og]. Navngiv listerne som vist:

$X := [0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10]$:

$Y := [0.002, 0.008, 0.033, 0.074, 0.130, 0.204, 0.294, 0.522, 0.816]$:

Kommandoen *PowReg* udfører en potensregression på de to datalister

$PowReg(X, Y)$



Heraf ses, at $a = 2.01$ og $b = 0.00807$.

Skal du bruge forskriften til et eller andet, så kan du definere den således:

$f := x \rightarrow 0.00807 \cdot x^{2.01}$

$$x \rightarrow 0.00807\, x^{2.01} \tag{8.7}$$

eller således:

$f := x \rightarrow PowReg(X, Y, x)$

$$x \rightarrow Gym\text{:-}PowReg(X, Y, x) \tag{8.8}$$

9 Differentialregning i Maple

9.1 Differentialkvotient

Det er meget simpelt at differentiere en funktion i Maple. Hvis fx en funktion er givet ved:

$f := x \to x^2 - 4\sqrt{x}$

$$x \to x^2 - 4\sqrt{x} \tag{9.1}$$

Så finder du differentialkvotienten af f ved blot at skrive $f'(x)$, og trykke Enter (eller udregne in-line)

$f'(x) = 2x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Skal du fx bruge differentialkvotienten i $x = 2$, ja, så udregner du blot:

$f'(2) = 4 - \sqrt{2}$

- og du behøver ikke at have udregnet $f'(x)$ først.

9.2 Tangentbestemmelse

Skal du fx bestemme tangenten til grafen for funktionen $f(x) = x^2 - 4\cdot\sqrt{x}$ i punktet med førstekoordinaten 4, definerer du først funktionen:

$f := x \to x^2 - 4\cdot\sqrt{x}$

$$x \to x^2 - 4\sqrt{x} \tag{9.2}$$

Dernæst opskriver du tangentligningen ved at indsætte $x_0 = 4$ i det generelle udtryk for tangentligningen:

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0).$$

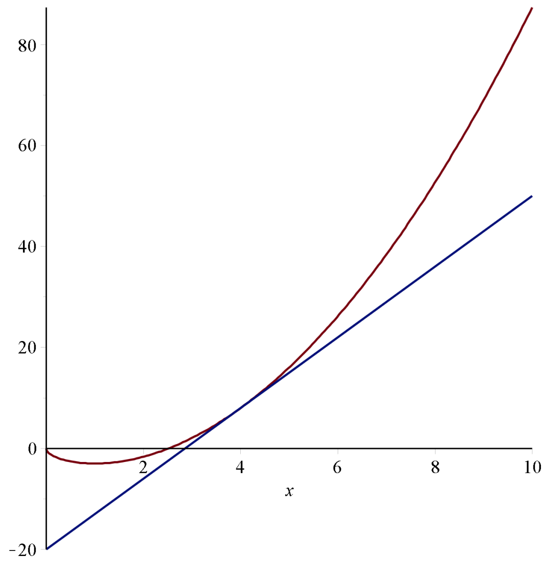
$y = f'(4)\cdot(x - 4) + f(4)$

$$y = \left(8 - \frac{1}{2}\sqrt{4}\right)(x - 4) + 8 \tag{9.3}$$

$\xrightarrow{\text{simplify}}$

$$y = 7x - 20$$

Hvis du vil plotte funktionen sammen med grafen, så indsæt først et koordinatsystem med **Insert** > **Plot** > **2D**. Funktionsudtrykket for f (altså $x^2 - 4 \cdot \sqrt{x}$) trækkes ind i koordinatsystemet sammen med tangentligningen $y = 7x + 20$:



Akserne er ændret, så der kun tegnes i intervallet $[0, 10]$.

Du kan naturligvis også klare dette med plot-kommandoen. Her må du **ikke** skrive tangentens ligning $y = 7x - 20$ ind i plot-funktionen - kun højresiden. Det hænger sammen med, at *plot*-kommandoen kun plotter funktioner og ikke ligninger.

$plot([f(x), 7x - 20], x = 0..6, y = -10..20)$:

TangentSecantTutor

Hvis du vil arbejde med forståelsen af en tangent som en grænselinje for sekanter, så kan denne Tutor anbefales.

Du starter Tutoren med valget **Tools > Tutors > Calculus Single-Variable > Tangents...**, eller ved at trykke Enter efter nedenstående linje:
$Student[Calculus1][TangentTutor]()$;

(9.4)

Du skal være opmærksom på, at indtastningen ikke er helt så let i indtastningsfeltet for $f(x)$. Her er du nødt til at skrive x^2 for x^2, x^3 for x^3, osv.

Hvis du fx vil undersøge funktionen $f(x) = x^2 - 4 \cdot \sqrt{x}$, skal du indtaste: x^2-4*sqrt(x), hvor sqrt er en forkortelse af squareroot.

Hvis du har den tilsvarende funktion defineret i et Maple dokument, kan du copy-paste funktionsudtrykket.

9.3 Monotoniforhold

Du kan benytte den afledede funktion $f'(x)$ som enhver anden funktion - fx kan du finde nulpunkter og fortegn.

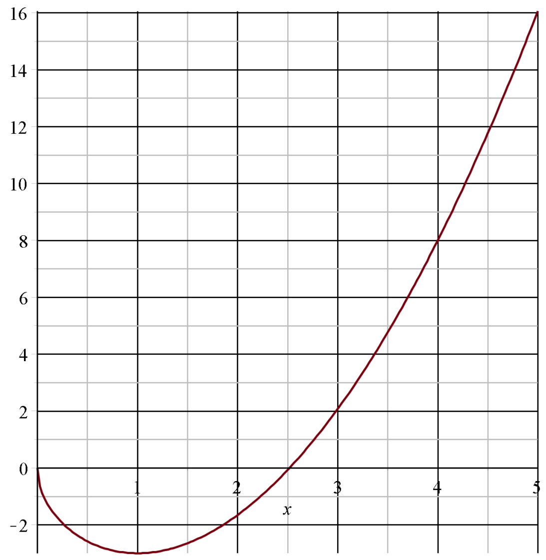
Lad os bestemme monotoniforhold og lokale ekstrema for funktionen:
$f := x \rightarrow x^2 - 4 \cdot \sqrt{x}$

$$x \rightarrow x^2 - 4\sqrt{x} \tag{9.5}$$

Først differentieres f:

Tegn først grafen for f i et passende interval, så alle ekstremer ses.

$plot(f(x), x = 0..5)$



$f'(x) = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

Dernæst bestemmes nulpunkter og fortegn for f' :

$f'(x) = 0$ # $2x - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1\}$

Løsningen til ligningen $f'(x) = 0$ sammenholdt med grafen for f viser, at

f er aftagende i intervallet $]0, 1]$

f er voksende i intervallet $[1, \infty[$

f har lokalt minimum i 1, og $f(1) = -3$.

Alternativt kan du gå sådan til værks:

$solve(f'(x) > 0, x)$

$$RealRange(Open(1),\ \infty) \tag{9.6}$$

$solve(f'(x) < 0, x)$

$$RealRange(Open(0), Open(1)) \tag{9.7}$$

Dette viser, at $f'(x)$ er negativ i intervallet $]0, 1[$ og positiv i intervallet $]1, \infty[$. Heraf følger, at

f er aftagende i intervallet $]0, 1]$

f er voksende i intervallet $[1,\infty[$

f har lokalt minimum i 1, og $f(1) = -3$.

OBS: Hvis du løser ulighederne ved at højre-klikke og vælge solve, får du ikke intervallerne, men blot en ulighed: $f'(x) > 0$

$$0 < 2x - \frac{2}{\sqrt{x}} \tag{9.8}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

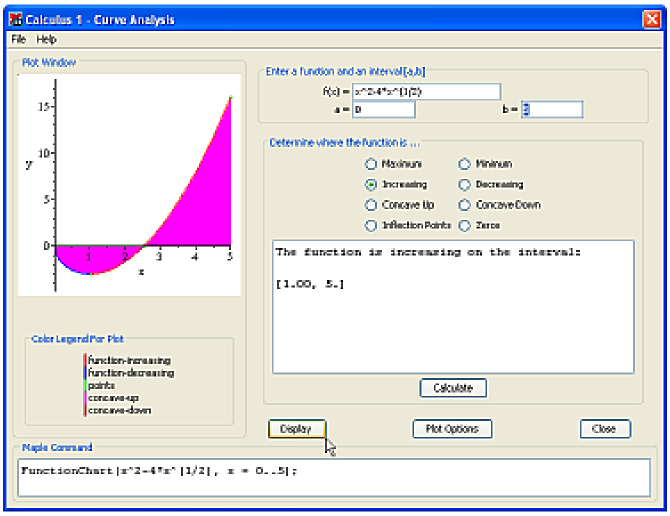
$$\{1 < x\}$$

9.4 CurveAnalysisTutor

Med denne Tutor kan du meget hurtigt lave en funktionsundersøgelse. Du starter Tutoren med valget **Tools > Tutors > Calculus Single-Variable > CurveAnalysisTutor**, eller ved at trykke Enter efter nedenstående linje:

Student[*Calculus1*][*CurveAnalysisTutor*]( );

- og du får denne dialog frem (her er ovenstående funktion indtastet):



9.5 Eksempler

Eksempel 1

Vis, at linjen med ligningen $y = x - \frac{3}{4}$ er tangent til grafen for $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

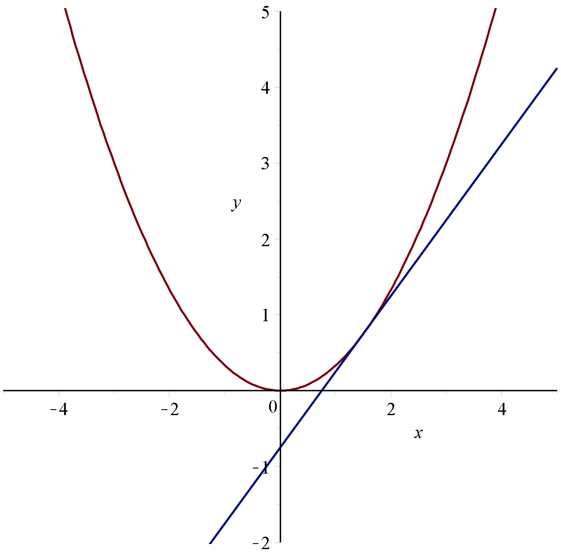
Løsning:

Lad os først prøve at tegne parablen og linjen for at se, om det ser rimeligt ud:

$f := x \rightarrow \frac{1}{3} x^2$

$$x \rightarrow \frac{1}{3} x^2 \tag{9.9}$$

$plot\left(\left[f(x), x - \frac{3}{4}\right], x = -5..5, y = -2..5\right)$



Og jo, det ser meget rimeligt ud, men et bevis er det ikke. Det er dette argument til gengæld:

Tangenten har hældningen 1, så du skal på jagt efter et punkt på parablen med hældningen 1 - dvs., at du skal løse ligningen $f'(x) = 1$:

$f'(x) = 1$ # $\frac{2}{3} x = 1 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{3}{2}\right\}$

Dvs., at i punktet med førstekoordinaten $x = \frac{3}{2}$ er tangentens hældning 1. Tilbage er blot at bestemme tangentens ligning i punktet med førstekoordinaten $x = \frac{3}{2}$:

$y = f'\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$

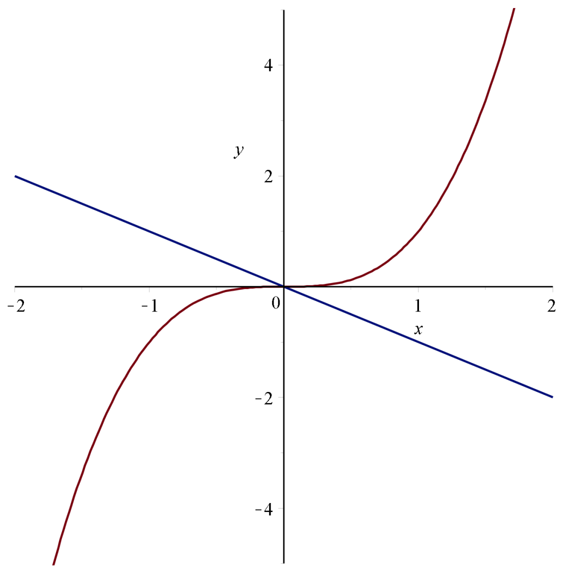
$$y = x - \frac{3}{4} \tag{9.10}$$

Bemærkning:

I det ovenstående eksempel er det i princippet ikke tilstrækkelig at argumentere for, at $y = x - \frac{3}{4}$ er en tangent ved at vise, at der netop er ét skæringspunkt mellem $y = x - \frac{3}{4}$ og grafen for f. At det så alligevel går godt, skyldes, at grafen for f er en parabel.

Hvis grafen for f ikke er en parabel, så er der ingen garanti for, at en ret linje er en tangent, hvis der netop er ét skæringspunkt. Fx vil $y=-x$ ikke være tangent til $f(x)=x^3$, selvom der kun er ét skæringspunkt:

$plot\left(\left[x^3,-x\right], x=-2..2, y=-5..5\right)$



Eksempel 2

For en sten, der kastes lodret op i luften med udgangsfarten 10m/s, kan dens højde over jerden $h(t)$ beregnes som

$$h(t)=10\,t-5\,t^2$$

hvor t er tiden i sekunder, efter at stenen er kastet.

1. Hvor længe stiger stenen ?
2. Hvor højt når stenen ?
3. Hvornår rammer stenen jorden ?
4. Med hvilken fart rammer stenen jorden ?
5. Hvornår er farten 5 m/s ?

Løsning:

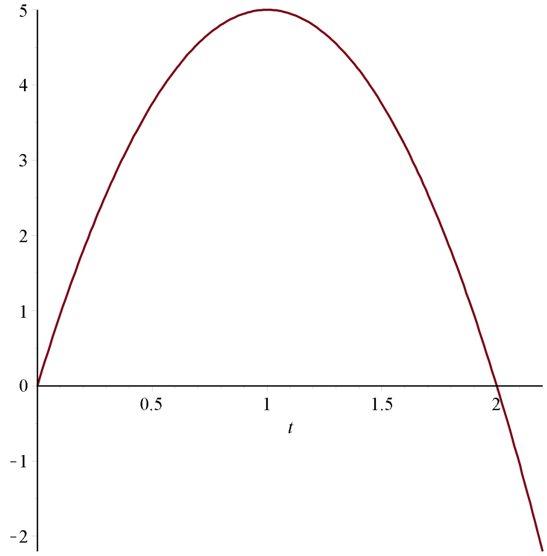
Som det så ofte er tilfældet kan en graf give et fingerpeg om, hvilken løsningsmetode, der skal benyttes. Desuden er grafen nyttig til kontrol af resultaterne.

Først skal funktionen h defineres

$h := t \rightarrow 10\,t - 5\,t^2$

$$t \rightarrow 10\,t - 5\,t^2 \qquad (9.11)$$

$plot(h(t), t = 0\,..2.2)$



Svarene på spørgsmål 1-3 kan direkte aflæses af grafen, men lad os for en god ordens skyld beregne dem.

1)

$h'(t) = 0$ # $10 - 10\,t = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 1\}$

Dvs., at stenen stiger i 1 sekund.

2)

$h(1) = 5$

Dette viser, at stenen når højden 5 m.

3)

$h(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 0\}, \{t = 2\}$

Til tiden $t = 2$ vil højden over jorden være 0 m. Dvs., at stenen rammer jorden efter 2 sekunder.

4)

$h'(2) = -10$

Stenen rammer jorden med en fart på 10 m/s. ($h'(t)$ angiver hastigheden til tiden t, så det negative fortegn skal tolkes som 'nedad')

5)

$h'(t) = 5$ # $10 - 10\,t = 5 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{t = \frac{1}{2}\right\}$

Efter $\frac{1}{2}$ sekund er farten 5 m/s.

Eksempel 3

En model for højdeudviklingen hos drenge mellem 0 og 16 år er givet ved:

$h(t) = \sqrt{1695\,t + 2500}\ , \quad 0 \le t \le 16$

hvor t er aderen i år, og $h(t)$ er højden i cm.

a) Hvilken højde har en dreng på 9 år iflg. modellen ?

b) Angiv væksthastigheden til $t = 3$.

c) Gør rede for, at væksthastigheden er aftagende.

Løsning:

Først defineres funktionen h (definitionsintervallet $0 \le t \le 16$ skal ikke medtages her)

$h := t \rightarrow \sqrt{1695\,t + 2500}$

$$t \rightarrow \sqrt{1695\,t + 2500} \tag{9.12}$$

a)

$h(9) = \sqrt{17755} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 133.25$

En 9-årig dreng har iflg. modellen en højde på 133cm.

b)

Væksthastigheden til tiden $t = 3$ bestemmes som

$h'(3) = \frac{339}{3034}\sqrt{7585} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 9.7308$

c)

For at bestemme monotoniforhold for væksthastigheden $h'(t)$ skal du bruge $h''(t)$:
$h''(t)$

$$-\frac{2873025}{4\,(1695\,t + 2500)^{3/2}} \tag{9.13}$$

Det ses umiddelbart, at $h''(t) < 0$ for alle t, $0 \le t \le 16$. Derfor er $h'(t)$ aftagende.

Du kan naturligvis benytte Maple til dette, ved at løse uligheden

$solve(\{h''(t) < 0, 0 < t < 16\}, t)$

$$\{0 < t, t < 16\} \tag{9.14}$$

Løsningen er alle t i intervallet $]0, 16[$.

10 Integralregning i Maple

10.1 Stamfunktion

Det er meget nemt at finde en stamfunktion i Maple. Hvis du vil finde en stamfunktion til funktionen:

$f := x \to 2x^2 - 3x + 5$

$$x \to 2x^2 - 3x + 5 \tag{10.1}$$

så klikker du på integral knappen i Expression-paletten, og udfylder skabelonen:

$\int f(x)\,dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x$

Læg mærke til, at du ikke får en integrationskonstant k med. Ønsker du det, så kan du klare det sådan her:

$\int f(x)\,dx + k = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + k$

Lidt mere kompliceret bliver det, hvis du vil navngive din stamfunktion F. Problemet opstår, hvis du prøver at definere således:

$F := x \to \int f(x)\,dx + k$

$$x \to \int f(x)\,dx + k \tag{10.2}$$

Maple beregner ikke stamfunktionen før der er behov for at kende den (det kaldes lazy evaluation). Ønsker du fx at beregne $F(2)$, vil x blive erstattet med 2, og udtrykket i **(10.2)** være meningsløst.

Der er flere måder at navngive stamfunktionen på:

Metode 1:

Du kan copy&paste udtrykket til definitionen

$F := x \to \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + k$

Metode 2

Højreklik (Mac: cmd+klik) på udtrykket for stamfunktionen, og vælge 'Assign to a Name i kontekstmenuen. I den lille boks, der popper op, skriver du $F(x)$. Maple gør vrøvl, hvis du ikke har indstillet til at acceptere funktionsdefinitioner med $f(x) :=$ (se afsnittet om Funktioner):

$\int f(x)\,dx + k = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + k \xrightarrow{\text{assign to a name}} F(x)$

Metode 3

Benytte kommandoen *unapply*, der tvinger Maple til en beregning:

$F := unapply\left(\int f(x)\,dx + k, x\right)$

$$x \to \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + k \tag{10.3}$$

Eksempel 1

Find den stamfunktion til $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, der opfylder, at $F(1) = 7$.

$f := x \to 2x^2 - 3x + 5$

$$x \to 2x^2 - 3x + 5 \tag{10.4}$$

Stamfunktionen bestemmes:

$\int f(x)\,dx + k = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + k \xrightarrow{\text{assign to a name}} F(x)$

$F(1) = 7 \overset{\text{simplify}}{=} \frac{25}{6} + k = 7 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{k = \frac{17}{6}\right\}$

Dvs., den ønskede stamfunktion bliver $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + \frac{17}{6}$

Eksempel 2

En funktion f er givet ved $f(x) = 2x - 3$. Find den stamfunktion F der har linjen med ligningen $y = x + 5$ som tangent.

I modsætning til eksempel 1 kender vi ikke her et punkt, som F skal gå i gennem. Det må vi så finde! Og det punkt, vi skal bruge, er tangeringspunktet.

Linjen $y = x + 5$ har hældningen 1, så hvis denne skal være tangent til F, må det ske i et punkt x, hvor $F'(x) = 1$.

$f := x \to 2x - 3$

$$x \to 2x - 3 \tag{10.5}$$

$\int f(x)\,dx + k = x^2 + k - 3x \xrightarrow{\text{assign to a name}} F(x)$

Vi finder ud af, hvor tangereringen sker ved at løse ligningen $F'(x) = 1$ (hvilket er det samme som ligningen $f(x) = 1$):

$F'(x) = 1 \overset{\text{simplify}}{=} 2x - 3 = 1 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 2\}$

I punktet med x-koordinaten 2 har F altså en tangent med hældningen 1. Hvis denne tanget skal være $y = x + 5$, så må tangeringen ske i punktet $(2, 7)$. Dette ses ved at sætte 2 ind i $y = x + 5$.

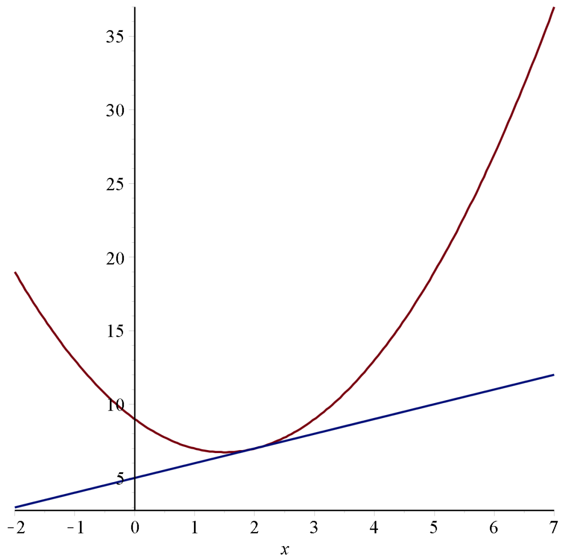
Tilbage er nu blot at bestemme k:

$F(2) = 7 \overset{\text{simplify}}{=} -2 + k = 7 \xrightarrow{\text{solutions for k}} 9 \xrightarrow{\text{assign to a name}} k$

så har du den ønskede stamfunktion

$F(x) = x^2 - 3x + 9$

$plot([F(x), x+5], x=-2..7)$



10.2 Areal under en graf

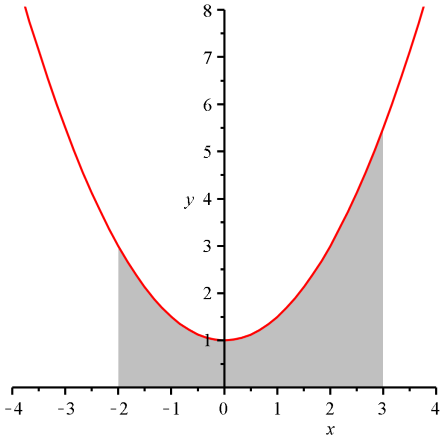
Hvis f er en positiv funktion i $[a, b]$, kan **arealet** af den punktmængde, der begrænses af grafen for f, linjerne med ligningerne $x = a$ og $x = b$, og førsteaksen - dvs.

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

bestemmes som $F(b) - F(a)$, hvor F er en vilkårlig valgt stamfunktion til f.

Dette areal kan bestemmes som $\int_a^b f(x)\, dx$, hvor skabelonen $\int_a^b f\, dx$ fra Expression-paletten benyttes til at skrive integralet. Skabelonen har 4 pladsholdere. Du udfylder skabelonen ved at hoppe fra pladsholder til pladsholder med TAB-tasten, og 'skrive oveni'.

I nedenstående figur ser du tegnet grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$



Det skraverede område kan beskrives ved punktmængden:

$$\{(x,y) \mid -2 \leq x \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

og arealet bestemmes således:

$$\int_{-2}^{3} \frac{1}{2}x^2 + 1 \, dx = \frac{65}{6}$$

Hvis du har defineret funktionen f ved:

$$f := x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 1$$

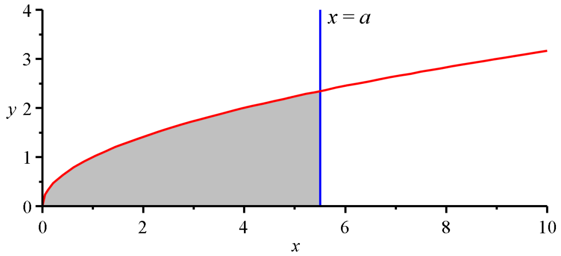
$$x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 1 \tag{10.6}$$

Kan du naturligvis blot indsætte $f(x)$ som integrand:

$$\int_{-2}^{3} f(x) \, dx = \frac{65}{6}$$

Eksempel 1

På figuren ser du tegnet grafen for funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Hvos skal linjen $x = a$ placeres, hvis arealet af det skraverede område skal være 10?



Løsning:

Lignigen, vi kommer til at løse, er denne

$$\int_0^a \sqrt{x}\, dx = 10 \overset{\text{simplify}}{=} \frac{2}{3} a^{3/2} = 10 \xrightarrow{\text{solve}} 6.082201996$$

hvor *numerical solve* er benyttet.

10.3 Areal af område begrænset af to grafer

Hvis f og g er to kontineuerte funktioner og $f(x) \geq g(x)$ for alle $x \in [a, b]$ (dvs., at grafen for f ligger over grafen for g i intervallet), så kan arealet af punktmængden

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b \;\wedge\; g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

bestemmes som

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Eksempel 2

Graferne for funktionerne

$$f(x) = \frac{1}{4} x^2 - x + 5$$

$$g(x) = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{7}{2} x - 3$$

afgrænser sammen med linjerne med ligningerne $x = 2$ og $x = 5$ et område, der har et areal.

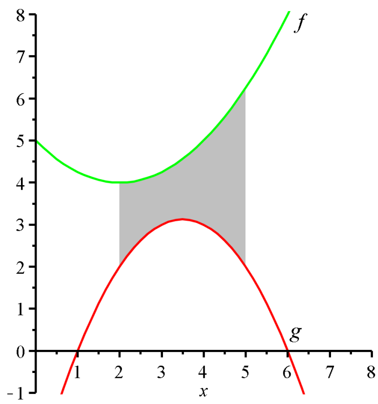
Bestem arealet af dette område.

Løsning

$f := x \rightarrow \frac{1}{4} x^2 - x + 5 :$

$g := x \rightarrow -\frac{1}{2} x^2 + \frac{7}{2} x - 3 :$

Først tegner vi området (i den sidste sektion kan du se, hvordan du skraverer et område mellem to grafer):



Da grafen for f ligger over grafen for g, kan vi bestemme arealet af det skraverede område således: $\int_{2}^{5} (f(x) - g(x))\, dx =$

6

Eksempel 3

Grafen for funktionen

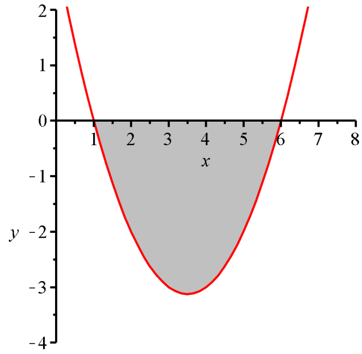
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3$$

begrænser sammen med x-aksen et område i 4. kvadrant, der har et areal.

Bestem dette areal

Løsning

Igen tegner vi først området (det er ikke nødvendigt at lave skraveringen):



Her kan x-aksen opfattes som den øverste funktion og grafen for f som den nederste funktion. Vi kan så finde arealet således:

$f := x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3$

$$x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3 \tag{10.7}$$

Vi finder skæringspunkterne med x-aksen:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 6\}, \{x = 1\}$

Arealet bliver da:

$\int_{1}^{6} (0 - f(x))\, dx = \frac{125}{12}$

10.4 Skravering af et område

Skravering af et område som fx

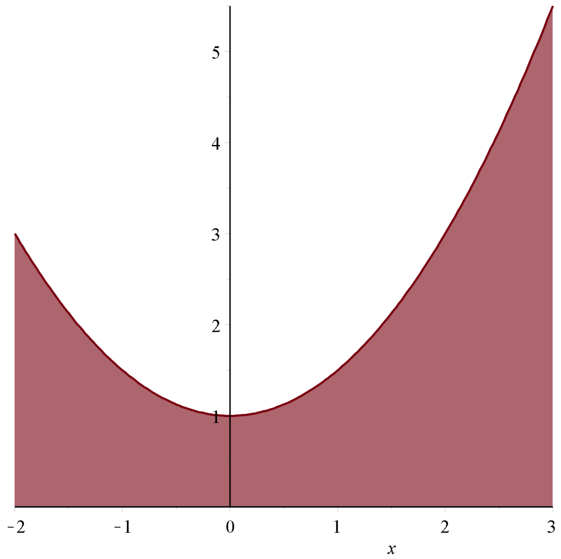
$$\{(x, y) \mid -2 \le x \le 3 \ \wedge \ 0 \le y \le f(x)\}$$

hvor funktionen f er givet ved

$f := x \to \frac{1}{2}x^2 + 1$

$$x \to \frac{1}{2}x^2 + 1 \tag{10.8}$$

sker ved at tilføje *filled* = *true* til plotkommandoen:
$plot(f(x), x = -2..3, filled = true)$



Her bliver hele området mellem x-aksen og grafen farvet i grafens farve. Det vil nok være pænest at bruge forskellige farver til grafen og området under grafen. Desuden er det ikke hensigtsmæssigt kun at kunne skravere i hele plot-intervallet.

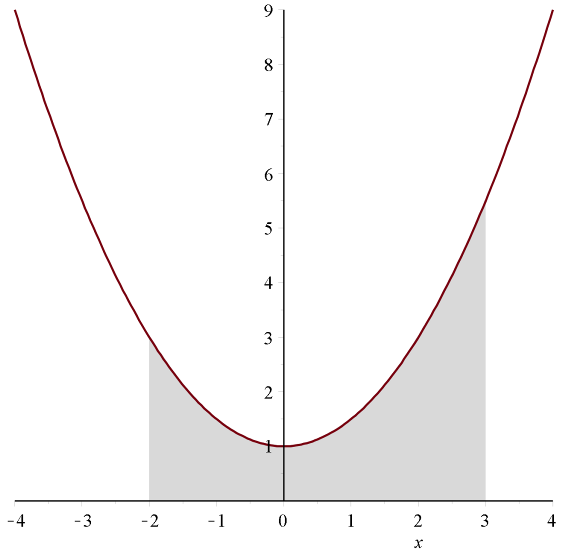
Fidusen er at lave to plots, hvor

- det første plot indeholder grafen for f i intervallet $[-4, 4]$
- det andet plot indeholder kun det farvede område under grafen i intervallet $[-2, 3]$
- de to plots lægges oven på hinanden - dette sker med *display* kommandoen fra *plots* pakken.

Det kommer til at se sådan ud (tast Shift+Enter for at gå til en ny linje i en command-block):

$with(plots)$:

$plot1 := plot(f(x), x = -4..4)$:
$plot2 := plot(f(x), x = -2..3, filled = true, color = gray)$:
$display([plot2, plot1])$



Noget mere kompliceret er det at få skraveret et område mellem to grafer. Fidusen er her, at farve det ene område hvidt. Læg mærke til, at det ikke er helt ligegyldigt i hvilken rækkefølge plottene lægges i display-kommandoen:

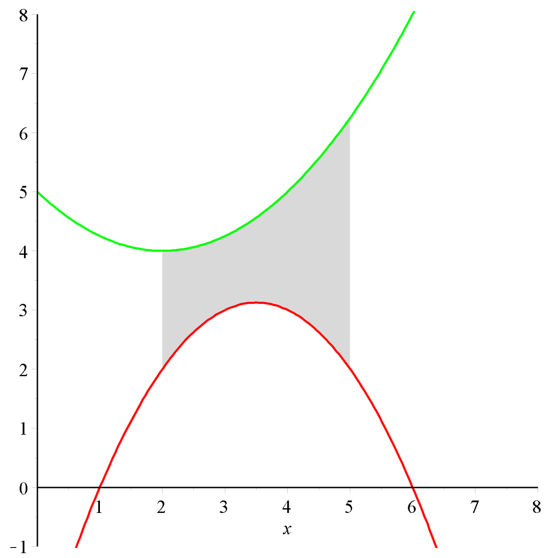
$f := x \rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x + 5$

$$x \rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x + 5 \tag{10.9}$$

$g := x \rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 3$

$$x \rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 3 \tag{10.10}$$

$plot1 := plot(f(x), x = 0..8, y = -1..8, color = green)$:
$plot2 := plot(g(x), x = 0..8, -1..8, color = red)$:
$plot3 := plot(g(x), x = 2..5, -1..8, color = white, filled = true, transparency = 0)$:
$plot4 := plot(f(x), x = 2..5, y = -1..8, color = gray, filled = true)$:
$display([plot3, plot4, plot1, plot2])$



11 Ikke-grupperede observationer

11.1 Gym-pakken skal være indlæst

Gym-pakken indeholder nogle rutiner til behandling af ikke-grupperede og grupperede observationssæt, og skal være indlæst for at dette dokument vil fungere.

$with(Gym)$:

11.2 Rå data

Du kan indtaste de rå data i en liste, en vektor, en matrix eller indlæse data fra en ekstern fil (fx i Excel format). Her er data i en liste (listen behøver ikke at være sorteret):

$obs := [8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 13]$:

Hyppigheder og frekvenser findes

$$H := hyppighed(obs) = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \\ 10 & 5 \\ 11 & 5 \\ 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F := frekvens(H) = \begin{bmatrix} 8 & 0.100 \\ 9 & 0.150 \\ 10 & 0.250 \\ 11 & 0.250 \\ 12 & 0.100 \\ 13 & 0.150 \end{bmatrix}$$

De kumulerede frekvenser findes

$$kumuleretFrekvens(F) = \begin{bmatrix} 8 & 0.100 \\ 9 & 0.250 \\ 10 & 0.500 \\ 11 & 0.750 \\ 12 & 0.850 \\ 13 & 1. \end{bmatrix}$$

Du kan klare det hele i én arbejdsgang ved at få udskrevet en frekvenstabel - du kan dog ikke benytte tabellen i senere beregninger, da det kun er tekst der udskrives

$frekvensTabel(obs)$

observation	hyppighed	frekvens	kumuleret
8	2	0.1	0.1
9	3	0.15	0.25
10	5	0.25	0.5
11	5	0.25	0.75
12	2	0.1	0.85
13	3	0.15	1

Herefter kan du fortsætte din undersøgelse med at tegne pindediagram, trappekurve mm. som beskrevet nedenfor.

11.3 Optalte data

Hvis du har data givet i en eller anden optalt form, indtaster du observationssættet i en matrix med observationerne i 1. søjle og hyppighederne (eller frekvenserne) i 2. søjle.

$$H := \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \\ 10 & 5 \\ 11 & 5 \\ 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}:$$

Her har du hyppighederne givet. Vil du finde frekvenserne og de kumulerede frekvenser, sker der sådan:

$$F := \mathit{frekvens}(H) = \begin{bmatrix} 8 & 0.100 \\ 9 & 0.150 \\ 10 & 0.250 \\ 11 & 0.250 \\ 12 & 0.100 \\ 13 & 0.150 \end{bmatrix}$$

$$\mathit{kumuleretFrekvens}(F) = \begin{bmatrix} 8 & 0.100 \\ 9 & 0.250 \\ 10 & 0.500 \\ 11 & 0.750 \\ 12 & 0.850 \\ 13 & 1. \end{bmatrix}$$

Du kan klare det hele i én arbejdsgang ved at få udskrevet en frekvenstabel - du kan dog ikke benytte tabellen i senere beregninger, da det kun er tekst der udskrives

$\mathit{frekvensTabel}(H)$

observation	hyppighed	frekvens	kumuleret
8	2	0.1	0.1
9	3	0.15	0.25
10	5	0.25	0.5
11	5	0.25	0.75
12	2	0.1	0.85
13	3	0.15	1

Hvis du kun har givet frekvenserne, kan du også lave en frekvenstabel:

$\mathit{frekvensTabel}(F)$

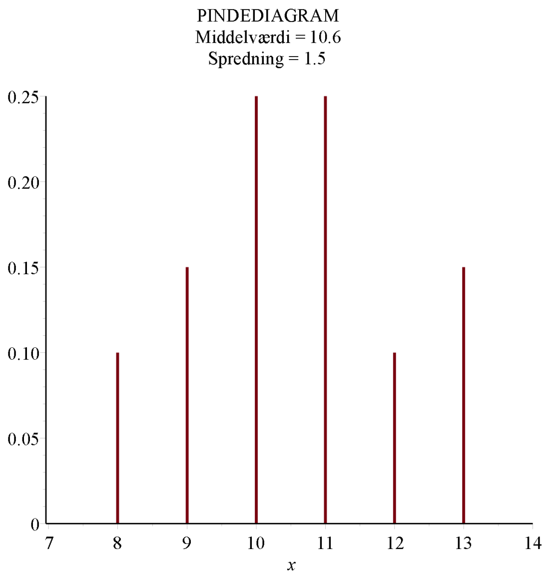
observation	frekvens	kumuleret
8	0.1	0.1
9	0.15	0.25
10	0.25	0.5
11	0.25	0.75
12	0.1	0.85
13	0.15	1

- hvor du af gode grunde ikke får en søjle med hyppigheder.

11.4 Pindediagram, trappekurve og deskriptorer

Pindediagrammet tegnes:

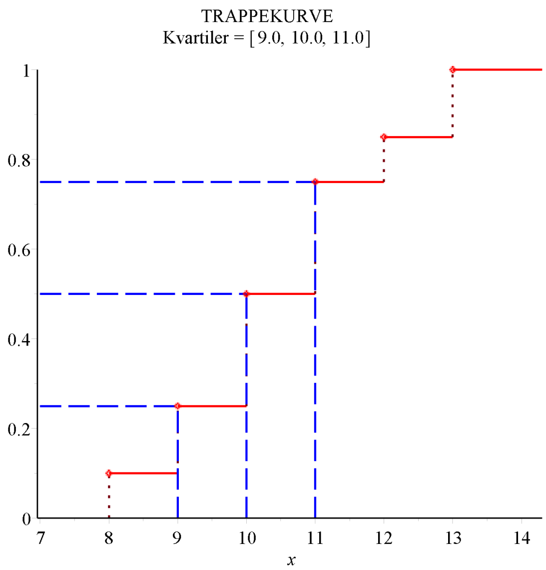
$plotPindediagram(H)$



Her får du desuden oplysning om observationssættets middelværdi og spredning.

Trappekurven plottes således (du kan også bruge H som input):

$plotTrappekurve(F)$



Her får du oplysning om observationssættets kvartilsæt med de tre linjer til aflæsning af kvartilerne indtegnet. Hvis du vil slette en eller flere af disse, klikker du på linjen og trykker Backspace.

Med Gym-pakken kan du også direkte få fat i de fleste deskriptorer

$middel(H) = 10.5500000000000$

$varians(H) = 2.24750000000000$

$spredning(H) = 1.49916643505650$

$typetal(H) = [10, 11]$

$kvartiler(H) = [9., 10., 11.]$

Gym-pakken indeholder også kommandoen *fraktil*. Med denne kan du finde den mindste observation, hvis kumulerede frekvens er fx 60% eller derover ved

$fraktil(H, 0.6) = 11$

Endelig kan kan du få fat i forskriften for trappekurven med kommandoen

$trappekurve(H, x)$

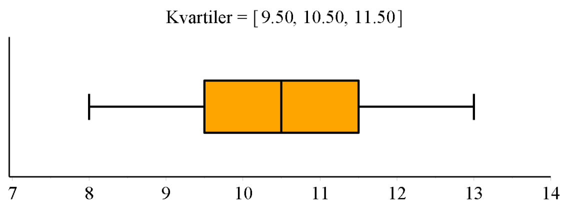
$$\begin{cases} 0 & x < 8 \\ 0.100000000000000 & 8 \le x \textbf{ and } x < 9 \\ 0.250000000000000 & 9 \le x \textbf{ and } x < 10 \\ 0.500000000000000 & 10 \le x \textbf{ and } x < 11 \\ 0.750000000000000 & 11 \le x \textbf{ and } x < 12 \\ 0.850000000000000 & 12 \le x \textbf{ and } x < 13 \\ 1 & 13 \le x \end{cases} \tag{11.1}$$

hvor parameteren x angiver navnet på den ønskede uafhængige variabel.

11.5 Boksplot af ikke-grupperede observationssæt

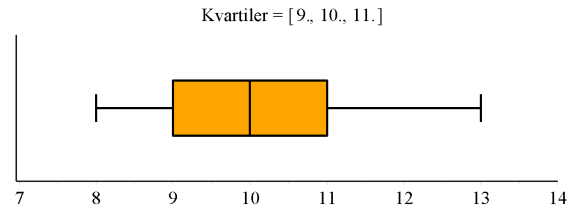
Anvender du kommandoen *boksplot* på de rå data, vil du få tegnet et boksplot, hvor kvartilerne ikke nødvendigvis er de samme som kvartilerne bestemt vha. trappekurven. På de rå data anvendes en metode (metode 2) baseret på opdeling af det sorterede observationssæt i 4 dele.

$boksplot(obs)$



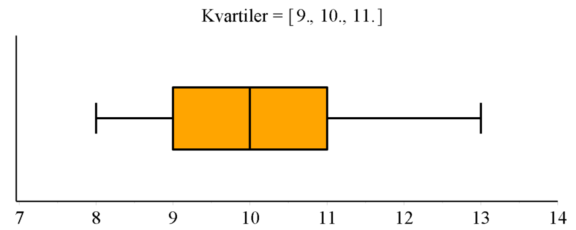
Hvis du ønsker, at der skal foretages en bestemmelse af kvartilerne baseret på trappekurve metoden, skal du tilføje, at *metode* = 1 skal benyttes:

boksplot([*obs*, *metode* = 1])



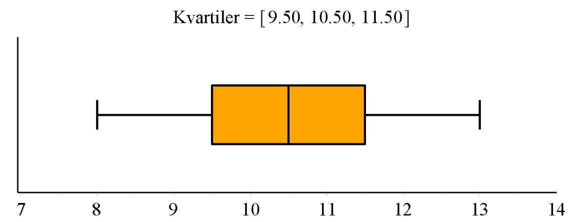
Er der foretaget nogen form for optælling af observationerne i enten en hyppighedstabel eller en frekvenstabel, så vil metode 1 blive benyttet som standard

boksplot(*H*)



Hvis du bruger en hyppighedstabel, men vil have boksplottet tegnet efter metode 2, så tilføjer du en parameter:

boksplot([*H*, *metode* = 2])



12 Grupperede observationer

12.1 Gym-pakken skal være indlæst

Gym-pakken indeholder nogle rutiner til behandling af ikke-grupperede og grupperede observationssæt, og skal være indlæst for at dette dokument vil fungere.

$with(Gym)$:

12.2 Rå data

Data kan grupperes med funktionen grupperData:

obs := [21.3, 13.7, 7.4, 13.4, 12.8, 9.2, 8.9, 4.2, 15.5, 11.9, 18.2, 14.1, 10.9, 21.7, 10.1, 10.2, 4.2, 23.3, 21.7, 9.9, 16.1, 22.4, 8.5, 13.1, 15.3, 19.0, 14.4, 15.6, 18.2, 14.9, 10.8, 13.7, 11.5, 24.8, 13.7, 14.6, 21.1, 10.1, 24.7, 15.6, 17.2, 12.4, 16.1, 12.9, 15.2, 24.9, 26.1, 19.4, 19.4, 10.7] :

Start med at finde den mindste og den største observation:

min(obs) = 4.2

max(obs) = 26.1

Alle observationer ligger i al fald i intervallet [0, 30]. Dette interval opdeles i delintervaller af længde 5, og observationerne grupperes efter denne opdeling i 6 grupper:

$G := grupperData(obs, 0..30, 6)$

$$\begin{bmatrix} 0..5. & 2 \\ 5...10. & 5 \\ 10...15. & 20 \\ 15...20. & 13 \\ 20...25. & 9 \\ 25...30 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

Intervalfrekvenserne og de kumulerede frekvenser finder du sådan her:

(12.2)

$$frekvens(G) = \begin{bmatrix} 0..5. & 0.0400 \\ 5...10. & 0.100 \\ 10...15. & 0.400 \\ 15...20. & 0.260 \\ 20...25. & 0.180 \\ 25...30 & 0.0200 \end{bmatrix}$$

$$kumuleretFrekvens(G) = \begin{bmatrix} 0..5. & 0.0400 \\ 5...10. & 0.140 \\ 10...15. & 0.540 \\ 15...20. & 0.800 \\ 20...25. & 0.980 \\ 25...30 & 1. \end{bmatrix}$$

12.3 Grupperede data

Observationssættet indtastes i en matrix med observationsintervallerne i 1. søjle og intervalhyppigheder (eller frekvenser) i 2. søjle.

$$\mathrm{H} := \begin{bmatrix} 0...5. & 2 \\ 5...10. & 5 \\ 10...15. & 20 \\ 15...20. & 13 \\ 20...25. & 9 \\ 25...30. & 1 \end{bmatrix}:$$

Frekvenser og kumulerede frekvenser findes:

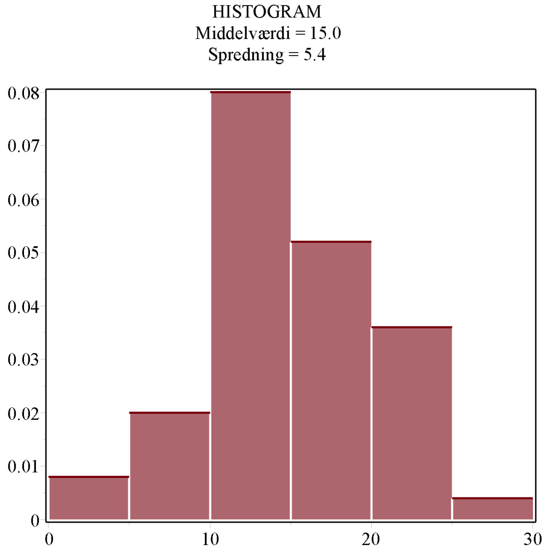
$$F := \mathit{frekvens}(H) = \begin{bmatrix} 0...5. & 0.0400 \\ 5...10. & 0.100 \\ 10...15. & 0.400 \\ 15...20. & 0.260 \\ 20...25. & 0.180 \\ 25...30. & 0.0200 \end{bmatrix}$$

$$\mathit{kumuleretFrekvens}(H) = \begin{bmatrix} 0...5. & 0.0400 \\ 5...10. & 0.140 \\ 10...15. & 0.540 \\ 15...20. & 0.800 \\ 20...25. & 0.980 \\ 25...30. & 1. \end{bmatrix}$$

12.4 Histogram, sumkurve og deskriptorer

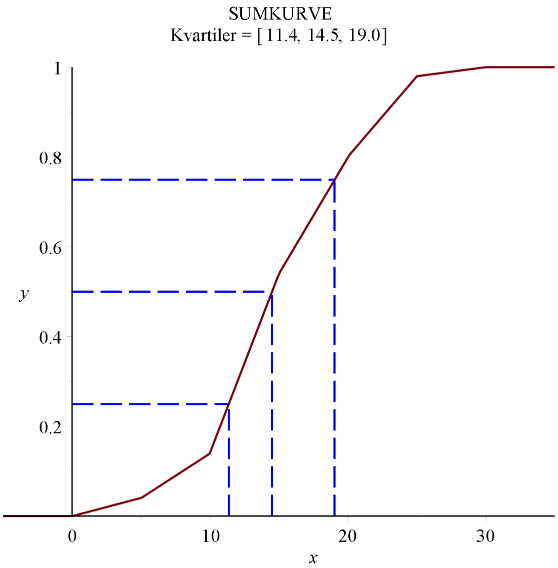
Histogrammet tegnes:

plotHistogram(H)



Her får du desuden oplysning om observationssættets middelværdi og spredning. Trappekurven plottes således:

plotSumkurve(H)



Her får du oplysning om observationssættets kvartilsæt med de tre linjer til aflæsning af kvartilerne indtegnet. Hvis du vil slette en eller flere af disse, klikker du på linjen og trykker Backspace.

Med Gym-pakken kan du også direkte få fat i de fleste deskriptorer

$middel(H) = 15.0000000000000$

$varians(H) = 29.2500000000000$

$spredning(H) = 5.40832691319598$

$typetal(H) = [10. ..15.]$

$kvartiler(H) = [11.38, 14.50, 19.04]$

Gym-pakken indeholder også kommandoen *fraktil*. Denne skal du bruge, når du kender en y-værdi, og skal finde den tilhørende x-værdi.

Fx er

$fraktil(H, 0.6) = 16.15384615$

Det betyder, at 60% af observationerne er under 16.15.

Skal du gå den anden vej - altså, hvis du kender x-værdien og skal finde den tilhørende y-værdi, benytter du kommandoen *sumkurve*.

Fx er

$sumkurve(H, 18) = 0.696000000000000$

Dvs., at 69.6% af observationerne er 18 eller derunder.

Endelig kan kan du få fat i forskriften for sumkurven med kommandoen

$sumkurve(H, x)$

$$\begin{cases} 0 & x < 0. \\ 0.00800000000000000\,x & 0. \leq x \textbf{ and } x < 5. \\ 0.0200000000000000\,x - 0.0600000000000000 & 5. \leq x \textbf{ and } x < 10. \\ 0.0800000000000000\,x - 0.660000000000000 & 10. \leq x \textbf{ and } x < 15. \\ 0.0520000000000000\,x - 0.240000000000000 & 15. \leq x \textbf{ and } x < 20. \\ 0.0360000000000000\,x + 0.0800000000000003 & 20. \leq x \textbf{ and } x < 25. \\ 0.00400000000000000\,x + 0.880000000000000 & 25. \leq x \textbf{ and } x < 30. \\ 1 & 30. \leq x \end{cases} \tag{12.3}$$

hvor parameteren x angiver navnet på den ønskede uafhængige variabel.

12.5 Boksplot af grupperede observationssæt

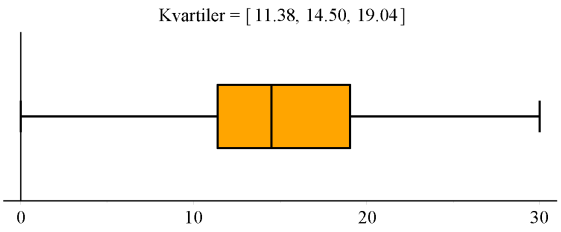
Er observationssættet grupperet, kender du ikke den mindste og den største observation, så i princippet er det ikke muligt at tegne et boksplot, med mindre ydergrænserne for grupperingen benyttes.

Lad os se på observationssættet

H

$$\begin{bmatrix} 0. .5. & 2 \\ 5. .10. & 5 \\ 10. .15. & 20 \\ 15. .20. & 13 \\ 20. .25. & 9 \\ 25. .30. & 1 \end{bmatrix} \qquad (12.4)$$

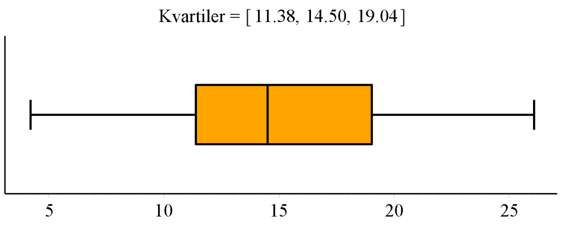
boksplot(H)



Her er mindste observation sat til 0 og den største til 30.

Hvis det oplyses, at disse er hhv. 4.2 og 26.1, så dette tilføjes i boksplottet

boksplot$([H, \{4.2, 26.1\}])$



13 Boksplot

13.1 Gym-pakken skal være indlæst

Gym-pakken indeholder nogle rutiner til behandling af ikke-grupperede og grupperede observationssæt, og skal være indlæst for at dette dokument vil fungere.

$with(Gym)$:

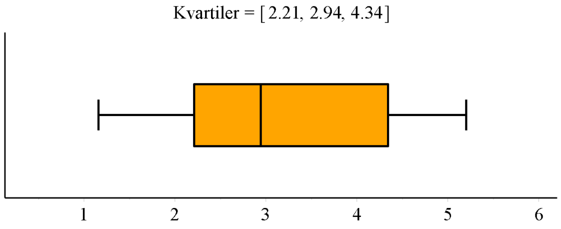
13.2 Enkelt boxplot

Dataserien indtastes som en liste

$data1 := [2.93, 2.58, 2.85, 4.26, 2.94, 4.33, 1.71, 4.42, 3.59, 4.35, 2.07, 1.16, 2.36, 1.25, 4.72, 5.2]$:

Boxplottet for $data1$ ser sådan ud (der er trukket en del i plottet for at det ikke skal se for voldsomt ud)

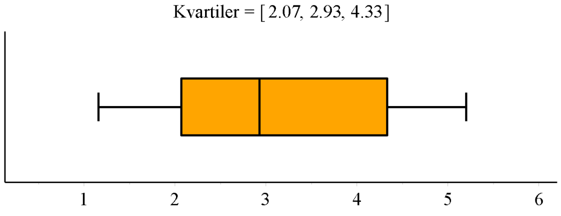
$boksplot(data1)$



OBS

Vil du have tegnet et boksplot på basis af kvartilsættet bestemt ved trappekurvemetoden, skal du tilføje en parameter (læs mere i hjælpeteksten):

$boksplot([data1, metode = 1])$



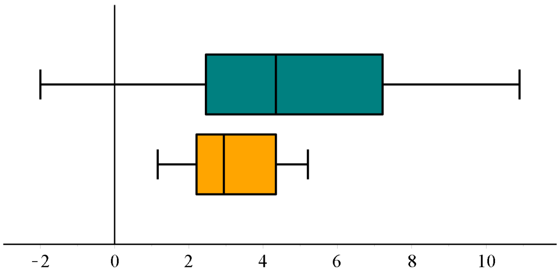
13.3 Sammenligning af to boxplots

Det er ingen sag at vise to boxplots sammen, så to datasæt kan sammenlignes:

$data1 := [2.93, 2.58, 2.85, 4.26, 2.94, 4.33, 1.71, 4.42, 3.59, 4.35, 2.07, 1.16, 2.36, 1.25, 4.72, 5.2]$:

$data2 := [2.46, 4.34, 0.182, 3.22, 5.37, 10.5, 3.11, -1.99, -0.865, 2.56, 10.6, 10.9, 6.56, 7.22, 4.84]:$

$boksplot(data1, data2)$



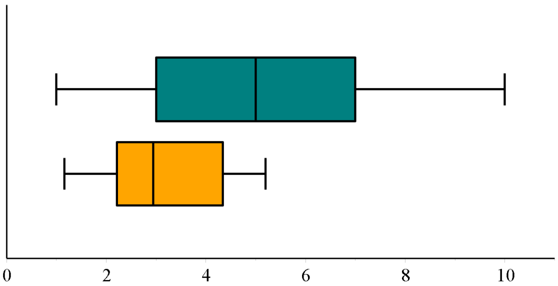
Lidt mere tricky er det at vise to boxplots sammen, hvis det ene datasæt er givet ved kvartilerne samt minimum og maksimum.

Hvis fx *data1* skal afbildes sammen med et boxplot med fx $\min = 1, \max = 10$, og kvartilsættet 3, 5, 7, skal du afbilde følgende datasæt, hvor du dublerer medianen:

$data := [1, 3, 5, 5, 7, 10]$

$$[1, 3, 5, 5, 7, 10] \tag{13.1}$$

$boksplot(data1, data)$



14 Binomialfordelingen

14.1 Opbygning af binomialfordelingen ganske kort

Start med at se på et **basalt eksperiment** E med to mulige udfald *succes* eller *fiasko* - dvs., at udfaldsrummet er

$U = \{s, f\}$

med sandsynlighederne

$P(s) = p \quad P(f) = 1 - p.$

Et par eksempler på et sådant eksperiment:

Kast med en ærlig mønt, hvor udfaldene *plat* eller *krone*

$P(s) = \frac{1}{2} \; P(f) = \frac{1}{2}.$

Kast med en ærlig terning, hvor udfaldene *6'er* eller *ikke-6'er* observeres. Hvis udfaldet *6'er* anses for at være en succes, har vi

$P(s) = \frac{1}{6} \; P(f) = \frac{5}{6}$

Binomialeksperiment
Det basale eksperiment gentages nu n gange, og de n gentagelser antages at være *uafhængige* af hinanden. Det betyder, at hvis der fx et tale om gentagne møntkast, så har mønten ingen hukommelse. Dvs., at sandsynligheden for at slå krone er den samme i alle gentagelser af eksperimentet.

Lad os som eksempel se på 6 gentagelser af et eksperiment med to mulige udfald $\{s, f\}$ med sandsynlighederne $P(s) = 0.4$ og $P(f) = 0.6$. Ved hver gentagelse noterer vi udfaldet, men er i øvrigt kun interesseret i antallet af succeser.

Et typisk udfald er en sekvens af s'er og f'er, fx *sffsff*, forstået på den måde, at i første forsøg fik vi s, i andet og tredje forsøg et f, i fjerde s, osv.

Da de enkelte forsøg er uafhængige, er sandsynligheden for at få netop sekvensen *sffsff* bestemt ved

$P(sffsff) = P(s) \cdot P(f) \cdot P(f) \cdot P(s) \cdot P(f) \cdot P(f) = 0.4^2 \cdot 0.6^4$

Men enhver anden sekvens med 2 s'er og 4 f'er må have samme sandsynlighed (da faktorernes orden er ligegyldig)

$P(ffssff) = P(f) \cdot P(f) \cdot P(s) \cdot P(s) \cdot P(f) \cdot P(f) = 0.4^2 \cdot 0.6^4$

Ved at finde alle - eller blot antallet - af sekvenser med 2 s'er og 4 f'er kan vi bestemme sandsynligheden for at få præcis 2 s'er i 6 forsøg.

Vi kan få Maple til at udskrive alle kombinationer (og tælle op):

$combinat[permute]([s, s, f, f, f, f])$

$$[[s, s, f, f, f, f], [s, f, s, f, f, f], [s, f, f, s, f, f], [s, f, f, f, s, f], [s, f, f, f, f, s], [f, s, s, f, f, f], [f, s, f, s, f, f], [f, s, f, f, s, f], [f, s, f, f, f, s], [f, f, s, s, f, f], [f, f, s, f, s, f], [f, f, s, f, f, s], [f, f, f, s, s, f], [f, f, f, s, f, s], [f, f, f, f, s, s]] \tag{14.1}$$

Antallet af kombinationer kan findes med kommandoen *nops*, der tæller op, hvor mange permutationer der er i ovenstående svar

$nops((\mathbf{1.1.1})) = 15$

Dvs, at sandsynligheden for at få præcis 2 s'er i 6 forsøg er

$15 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^4 = 0.311040$

Helt tilsvarende kan du finde sandsynlighederne for de andre udfald. De nemmeste at finde er for 0 s'er og for 1 s:

Den eneste sekvens med 0 s'er er *ffffff*, og denne har sandsynligheden

$0.6^6 = 0.046656$

Der er 6 sekvenser med 1 s: *sfffff*,*fsffff*, ... , og alle sekvenser har sandsynligheden $0.4 \cdot 0.6^5$. Sandsynligheden for 1 s er derfor

$6 \cdot 0.4 \cdot 0.6^5 = 0.186624$

Find selv sandsynligheden for 3, 4, 5 og 6 s'er. Brug Maple til at tælle sekvenser med, hvis du er i tvivl om, hvor mange der er.

Maple har naturligvis bedre værktøjer til optælling af sekvenser med 2 s'er:

$\text{binomial}(6, 2) = 15$

For at forstå disse tal er det nemmest at tænke på et skema med 6 felter, der skal udfyldes med enten s eller f. Antallet af forskellige måder, hvorpå du kan udvælge 2 felter ud af 6 (og skrive s i disse) er $\text{binomial}(6, 2)$. Pr. automatik kommer der så til at stå f i de 4 tilbageværende.

Du har sikkert bemærket, at $\text{binomial}(6, 4)$ også er lig med 15. Er der en god forklaring på dette?

Vi kan nu skrive en formel op for sandsynligheden for at få r s'er i 6 forsøg:
$P(r) := binomial(6, r) \cdot 0.4^r \cdot 0.6^{6-r}$

$$r \rightarrow combinat\text{:-binomial}(6, r)\, 0.4^r\, 0.6^{6-r} \tag{14.2}$$

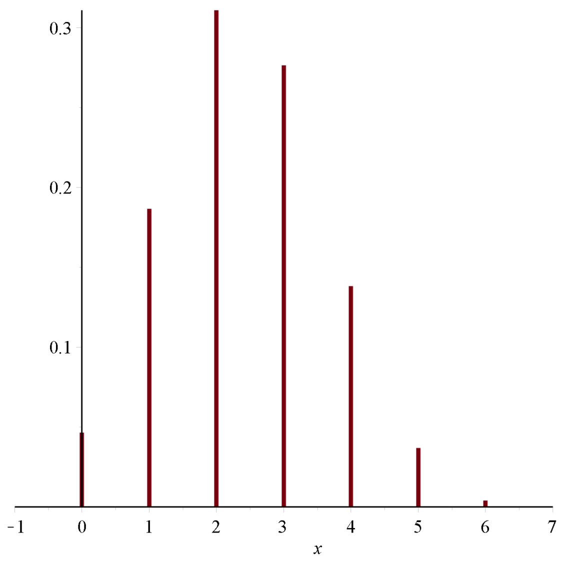
Lad os samle tallene i en tabel:

Antal succes	Sandsynlighed	Kummuleret
0	$binomial(6, 0) \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^6 = 0.0466560$	0.0466560
1	$binomial(6, 1) \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^5 = 0.186624$	0.2332800
2	$binomial(6, 2) \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^4 = 0.311040$	0.5443200
3	$binomial(6, 3) \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^3 = 0.276480$	0.8208000
4	$binomial(6, 4) \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^2 = 0.138240$	0.9590400
5	$binomial(6, 5) \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^1 = 0.036864$	0.9959040
6	$binomial(6, 6) \cdot 0.4^6 \cdot 0.6^0 = 0.0040960$	1.0000000

Punktsandsynlighederne illustreres med et pindediagram (med $n = 6$ og $p = 0.4$) - *pindediagramBIN* findes i Gym-pakken:

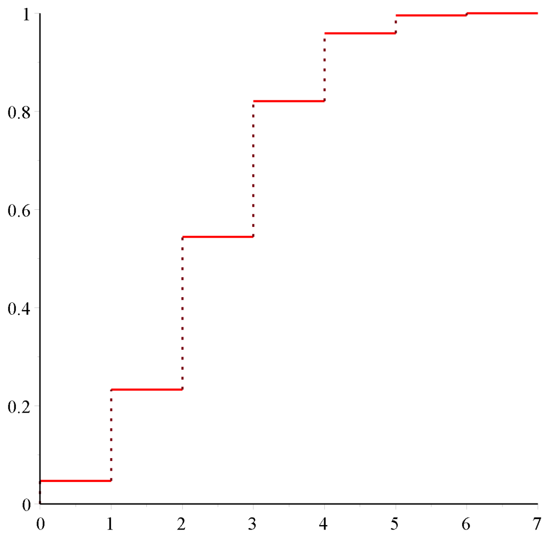
$with(Gym)$:

$pindediagramBIN(6, 0.4)$



De kummulerede sandsynligheder illustreres med en trappekurve (med $n = 6$ og $p = 0.4$) - *trappekurveBIN* findes i Gym-pakken):

$trappekurveBIN(6, 0.4)$



14.2 Binomialfordelingen - definition

Udfaldsrummet U for ovenstående eksperiment er sekvenser af længen 6 bestående af s'er og f' er - i alt $2^6 = 64$ elementer. Dvs.,

$U = \{ssssss, fsssss, sfssss, ..., sssssf, ffssss, fsfsss, ..., ssssff, ..., ffffff\}$

På U definerer vi en funktion X ved

$X(u) = antal\ s'er\ i\ u, \quad u \in U$

Fx er $X(ssffff) = 2$ og $X(sfsssf) = 4$. X kan kun antage værdier i mængden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Funktionen X kaldes en **stokastisk variabel**.

Idet sandsynligheden for, at X antager værdien r betegnes $P(X = r)$, kan vi skrive

$$P(X = r) = binomial(6, r) \cdot 0.4^r \cdot 0.6^{6-r}$$

Tilsvarende betegnes sandsynligheden for, at X antager værdien højst r med $P(X \le r)$, hvilket er de kummulerede sandsynligheder:

$$P(X \le r) = \sum_{i=0}^{r} binomial(6, i) \cdot 0.4^i \cdot 0.6^{6-i}$$

Med disse betegnelser ser ovenstående tabel sådan ud

r	$P(X = r)$	$P(X \le r)$
0	0.046656	0.046656
1	0.186624	0.2332800
2	0.311040	0.5443200
3	0.276480	0.8208000
4	0.138240	0.9590400
5	0.036864	0.9959040
6	0.004096	1.0000000

Generelt ser setup sådan ud:

Definition

Lad E være et eksperiment med udfaldsrum $U = \{s, f\}$ og $P(s) = p$.

Et **binomialeksperiment** er n uafhængige gentagelser af eksperimentet E. Tallet n kaldes antalsparameteren og tallet p kaldes sandsynlighedsparameteren.

Definition

En binomialfordelt stokastisk variabel X er en stokastisk variabel, som tæller antallet af successer i et binomialeksperiment.

Sætning

Sandsynlighedsfunktionen for en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p er bestemt ved:

$$P(X = r) = binomial(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

Notation Hvis X er en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p skriver vi $X \sim bi(n, p)$.
Definition Fordelingsfunktionen for en binomialfordelt stokastisk variabel er defineret ved: $F(t) = P(X \leq t) = \sum_{i=0}^{t} P(X = t)$

Lige et par ord om fordelingsfunktionen:

Af definitionen følger, at fordelingsfunktionen er defineret for alle reelle tal. Hvis t er negativ, er $F(t) = 0$, idet den stokastiske variabel X ikke kan antage negative værdier.

For $t = 0$ er:

$F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0)$

Det betyder, af F foretager et spring i 0 svarende til sandsynligheden for at få 0 successer. I intervallet $]0, 1[$ er F konstant med værdien $P(X = 0)$.

I $t = 1$ er

$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

så her foretager F et spring på $P(X = 1)$, og er herefter konstant i $]1, 2[$.

Således fortsættes indtil $t > n$, hvor efter F er konstant med værdien 1. Grafen for F bliver altså en trappekurve med spring i $0, 1, \ldots, n$.

14.3 Eksempler

$with(Gym)$:

Med Gym-pakken indlæst har du nem adgang til både sandsynlighedsfunktionen *binpdf* og fordelingsfunktionen *bincdf*. I funktionsnavnene står 'pdf' for 'propability density function' og 'cdf' for 'cumulative distribution function'.

Syntaksen vil fremgå af dette eksempel:

Lad den stokastiske variabel X være defineret ved

$$X = \text{antal 6'ere i 10 kast med en terning}$$

så ved vi, at $X \sim bi\left(10, \frac{1}{6}\right)$.

Sandsynligheden for at slå **netop** 3 seksere kan bestemmes ved:

$binpdf\left(10, \frac{1}{6}, 3\right) = 0.1550453596$

- og sandsynligheden for **højst** 3 seksere

$$bincdf\left(10, \frac{1}{6}, 3\right) = 0.9302721574$$

- og endelig sandsynligheden for **mindst** 3 seksere:

$$1 - bincdf\left(10, \frac{1}{6}, 2\right) = 0.2247732021$$

Eksempel 1

I et spil er sandsynligheden for at vinde 0.15. Spillet spilles 22 gange. Hvad er

1. Sandsynligheden for at vinde netop 2 gange
2. Sandsynligheden for at vinde højst 2 gange
3. Sandsynligheden for at vinde mindst 2 gange
4. Sandsynligheden for at vinde mellem 2 og 5 gange.
5. Tegn et pindediagram
6. Hvad er det største antal gange, spillet må spilles, hvis sandsynligheden for, at vinde højst 2 gange, ikke må komme under 0.5.
   $with(Gym)$:

Lad X være defineret ved:

$$X = \text{antal gevinster i 22 gentagelser af et spil}$$

så ved vi, at $X \sim bi(22, 0.15)$.

1)

Sandsynligheden for at vinde netop 10 gange. Her er det $P(X=2)$ du skal finde:

$$binpdf(22, 0.15, 2) = 0.2014526628$$

2)

Sandsynligheden for at vinde højst 2 gange. Her er det $P(X \leq 2)$ du skal finde:

$$bincdf(22, 0.15, 2) = 0.3381769087$$

3)

Sandsynligheden for at vinde mindst 2 gange. Her skal du udregne $P(X \geq 2)$, hvilket er det samme som $1 - P(X \leq 1)$:

$$1 - bincdf(22, 0.15, 1) = 0.8632757541$$

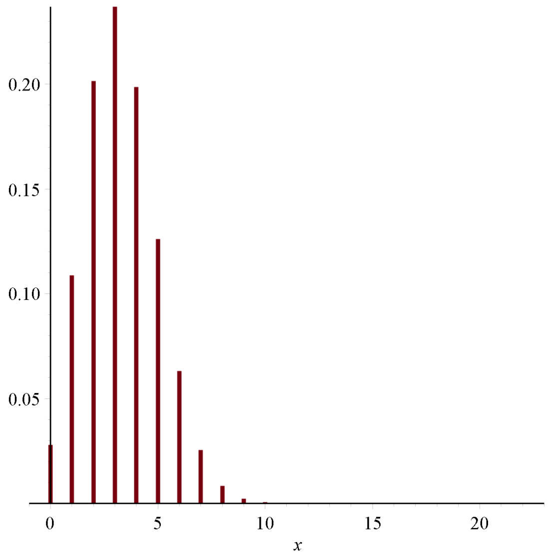
4)

Sandsynligheden for at vinde mellem 2 og 5 gange

$$bincdf(22, 0.15, 5) - bincdf(22, 0.15, 1) = 0.7633305050$$

5)

pindediagramBIN(22, 0.15)



6)

Hvad er det største antal gange, spillet må spilles, hvis sandsynligheden for, at vinde højst 2 gange, ikke må komme under 0.5.

Ovenfor har vi udregnet, at hvis spillet spilles 22 gange, så er sandsynligheden for at vinde højst 2 gange ca. 0.34. Der skal altså spilles færre gange.

Du kan naturligvis prøve dig frem ved at ændre antalsparameteren i ovenstående udregning og genberegne. Men skal det gøres ordentligt, så skal løse ligningen (brug 'numerically solve'):

$$bincdf(n, 0.15, 2) = 0.5 \xrightarrow{\text{solve}} 17.48761469$$

Dette viser, at spillet højst må spilles 17 gange.

Eksempel 2 - Tips13

1. Hvad er sandsynligheden for at tippe en 10'er i Tips13?
2. Hvad er sandsynligheden for gevinst i Tips13
3. Hvor mange rigtige er der størst sandsynlighed for at tippe?

På en Tips13 kupon skal du tippe (gætte) resultatet i 13 kampe ved at vælge et af tegnene 1,x og 2 (1 for hjemmesejr, x for uafgjort og 2 for udesejr).
Hvis man absolut ikke har forstand på fodbold, kan udfyldningen af en tipskupon opfattes som et binomialeksperiment med antalsparameter 13 og sandsynlighedsparameter $\frac{1}{3}$. Det basale eksperiment er at tippe resultatet i én kamp - dvs. vælge ét af tegnene 1, x eller 2. Der er så én mulighed for at vælge rigtigt og to muligheder for at vælge forkert. Når det handler om at tippe rigtigt, må $p = \frac{1}{3}$.

Til beskrivelsen af Tips13 skal du altså bruge en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter $n = 13$ og sandsynlighedsparameter $p = \frac{1}{3}$. Altså $X \sim bi\left(13, \frac{1}{3}\right)$.

1)

Sandsynligheden for at tippe 10 rigtige

$$binpdf\left(13, \frac{1}{3}, 10\right) = 0.001435091885$$

2)

Sandsynligheden for gevinst

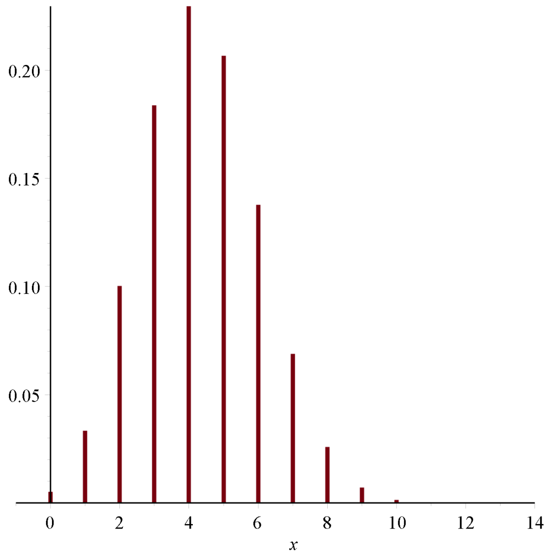
$$1 - bincdf\left(13, \frac{1}{3}, 9\right) = 0.0016477213$$

3)

Hvor mange rigtige er der størst sandsynlighed for at tippe?

Hertil tegner vi pindediagrammet og finder den længste pind:

$$pindediagramBIN\left(13, \frac{1}{3}\right)$$



Pindediagrammet viser, at 4 rigtige er det mest sandsynlige.

15 Normalfordelingen

15.1 Data

Data består her af resultatet af en vejning af 500 personer, der kan studeres i sektionen **Data** nedenfor.

Data vil her blive behandlet som et grupperet observationssæt, hvor vi selv laver grupperingen og Maple laver optællingen i grupper.

data := [74.53, 67.80, 65.93, 65.28, 78.37, 70.05, 68.41, 68.06, 62.48, 74.44, 64.38, 81.88, 54.13, 71.39, 75.11, 73.86, 75.08, 73.62, 68.16, 59.48,
59.36, 76.37, 62.02, 69.17, 76.16, 65.68, 66.35, 83.68, 70.35, 62.97, 70.49, 70.30, 71.94, 66.13, 75.68, 70.36, 63.50, 64.09, 65.95, 79.44,
57.90, 64.87, 77.17, 61.36, 57.03, 72.95, 71.51, 59.59, 67.28, 75.41, 67.98, 67.98, 77.58, 77.68, 62.43, 58.59, 70.87, 68.61, 74.54, 82.89,
63.60, 71.93, 71.88, 71.02, 77.05, 68.64, 89.48, 75.01, 74.32, 75.32, 67.79, 71.23, 74.72, 84.41, 73.58, 82.03, 63.29, 69.07, 69.74, 75.91,
76.49, 73.68, 73.39, 64.58, 75.98, 72.66, 76.27, 62.34, 64.63, 71.13, 67.53, 72.24, 79.80, 73.84, 77.81, 75.02, 73.99, 62.41, 65.18, 72.79,
66.57, 70.17, 68.98, 75.47, 73.44, 58.52, 78.76, 63.14, 78.82, 79.68, 71.99, 61.78, 80.92, 62.63, 64.80, 66.32, 70.06, 81.70, 59.47, 65.94,
60.88, 68.70, 68.06, 52.81, 81.10, 68.90, 56.25, 64.07, 62.18, 72.05, 88.77, 57.25, 68.37, 77.90, 71.58, 82.59, 69.01, 79.33, 66.69, 68.81,
72.51, 71.39, 68.68, 70.71, 58.42, 74.92, 70.53, 78.38, 68.56, 76.59, 71.67, 67.88, 69.49, 81.05, 59.51, 81.18, 62.52, 69.44, 75.97, 65.45,
77.00, 73.87, 70.42, 71.77, 64.43, 79.25, 71.04, 67.39, 84.27, 60.53, 65.19, 80.37, 73.95, 73.01, 55.43, 76.24, 68.24, 70.44, 76.59, 59.62,
64.96, 75.78, 79.79, 64.60, 64.21, 71.06, 67.05, 65.93, 69.64, 65.84, 70.20, 83.86, 69.30, 63.93, 73.49, 80.36, 60.01, 76.99, 65.46, 72.74,
66.76, 61.79, 66.28, 71.12, 79.16, 63.00, 61.83, 79.57, 62.33, 81.55, 62.88, 57.28, 65.08, 64.50, 69.57, 64.55, 65.36, 80.49, 63.76, 71.89,
68.77, 64.91, 74.82, 65.33, 64.02, 62.17, 75.52, 65.51, 67.44, 67.74, 66.40, 60.35, 75.40, 76.41, 83.53, 69.92, 63.61, 71.29, 71.09, 71.70,
61.70, 69.14, 80.62, 59.61, 66.15, 70.52, 68.00, 66.92, 67.75, 67.85, 69.19, 80.16, 68.56, 66.37, 76.97, 88.08, 81.27, 67.97, 73.35, 83.31,
57.61, 59.52, 66.74, 72.77, 70.32, 80.34, 74.03, 58.27, 71.67, 74.72, 68.70, 84.24, 71.94, 71.14, 65.38, 66.25, 63.20, 64.53, 67.70, 69.45,
66.50, 70.61, 65.81, 63.68, 77.50, 77.67, 66.25, 65.08, 74.62, 67.40, 75.87, 74.12, 65.61, 61.80, 71.43, 77.40, 63.29, 72.96, 69.65, 66.24,
61.39, 59.06, 60.01, 76.07, 62.37, 67.93, 64.08, 68.35, 68.41, 65.61, 63.44, 76.75, 61.73, 61.66, 77.15, 65.67, 75.05, 75.14, 80.21, 84.97,
72.65, 76.02, 65.95, 79.32, 74.61, 65.92, 54.66, 67.29, 74.99, 73.56, 73.43, 52.25, 76.94, 77.50, 73.31, 66.78, 58.60, 60.51, 68.32, 80.96,
52.73, 60.68, 69.44, 72.04, 75.12, 76.51, 69.82, 72.91, 72.01, 68.12, 55.06, 65.62, 75.31, 73.69, 67.89, 66.06, 66.50, 71.18, 77.45, 69.23,
66.05, 65.01, 68.95, 72.31, 72.20, 73.40, 73.57, 73.67, 73.87, 71.86, 72.03, 74.99, 72.85, 70.04, 61.87, 62.62, 71.54, 59.95, 76.69, 71.77,
78.58, 83.12, 76.52, 70.52, 59.26, 79.35, 72.68, 71.12, 77.13, 71.86, 68.51, 62.58, 75.45, 67.17, 75.68, 78.54, 72.34, 79.51, 78.50, 59.07,
77.68, 75.75, 65.25, 70.32, 80.27, 63.40, 69.53, 74.34, 78.84, 65.46, 83.23, 59.87, 62.61, 73.78, 72.95, 75.35, 72.38, 79.71, 75.11, 64.04,
64.35, 72.78, 67.44, 60.54, 79.69, 75.42, 69.00, 67.15, 69.58, 74.59, 72.08, 69.03, 59.85, 64.84, 64.12, 74.64, 64.66, 74.97, 76.87, 56.17,
83.38, 65.96, 64.14, 64.85, 68.99, 67.54, 62.60, 69.31, 76.10, 64.63, 74.94, 71.37, 68.00, 74.20, 66.31, 70.28, 58.16, 63.84, 78.69, 58.80,
69.35, 69.24, 75.50, 67.41, 69.62, 68.15, 67.36, 74.93, 74.89, 58.35, 79.08, 64.41, 71.77, 59.29, 60.67, 80.16, 77.03, 67.01, 72.91, 64.03,
78.68, 71.55, 76.91, 72.22, 68.08, 70.18, 68.65, 64.37, 67.99, 64.37, 76.09, 71.17, 63.39, 71.01, 71.76, 82.65, 75.25, 70.90, 62.32, 73.93]
:

15.2 Gruppering af data

$with(Gym)$:

For at danne dig et overblik over data, finder du den største og den mindste observation:

$\min(data) = 52.25$

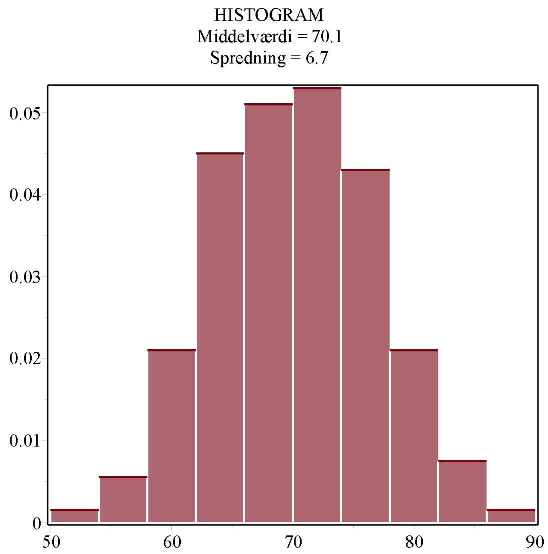
$\max(data) = 89.48$

Dette viser, at data ligger i intervallet $[50, 90]$. Dette interval skal opdeles i en række delintervaller - fx 10 - af længde 4:

$M := grupperData(data, [50..90], 10)$

$$\begin{bmatrix} 50..54. & 3 \\ 54...58. & 11 \\ 58...62. & 42 \\ 62...66. & 90 \\ 66...70. & 102 \\ 70...74. & 106 \\ 74...78. & 86 \\ 78...82. & 42 \\ 82...86. & 15 \\ 86...90 & 3 \end{bmatrix} \tag{15.1}$$

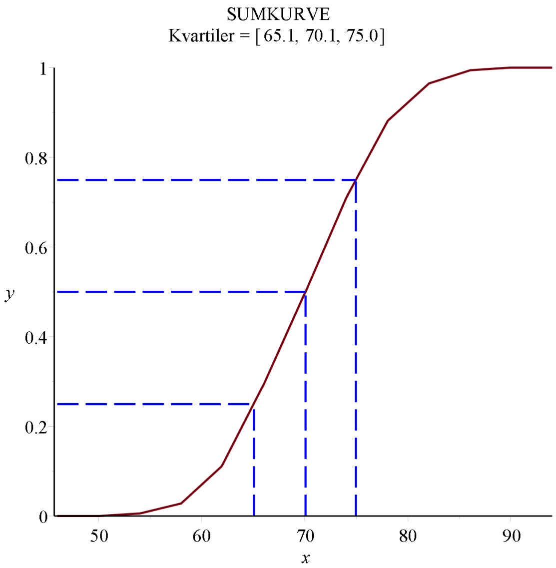
$plotHistogram(M)$



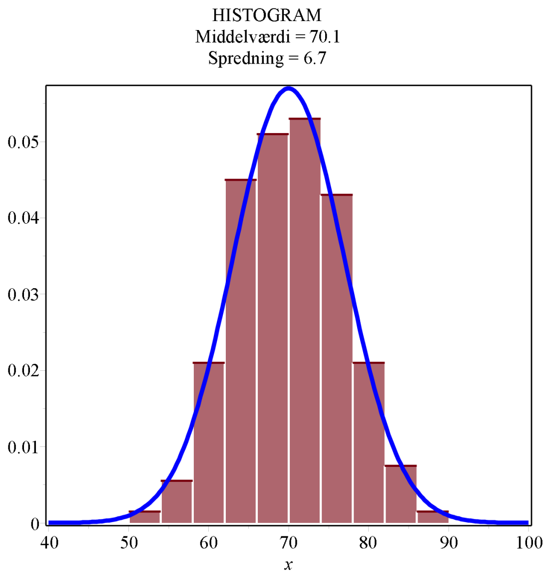
Prøv at ændre antallet af intervaller *grupper*, og følg, hvad der sker i histogrammet og i sumkurven nedenfor. Prøv specielt at lave intervallerne små og vurder påstanden, man møder i litteraturen om emnet:

På samme måde som med histogrammerne vil de sumkurver, der opstår, når intervallerne gøres kortere og kortere, efterhånden smelte sammen til en glat kurve"

$plotSumkurve(M)$



Nedenfor ser du den omtalte klokkeformede kurve indtegnet sammen med histogrammet (hvis du vil se, hvordan plottet er lavet, klikker du i plottet og vælger Format > Remove Document Block):



15.3 Deskriptorer

Med Gym-pakken kan du finde de fleste deskriptorer:

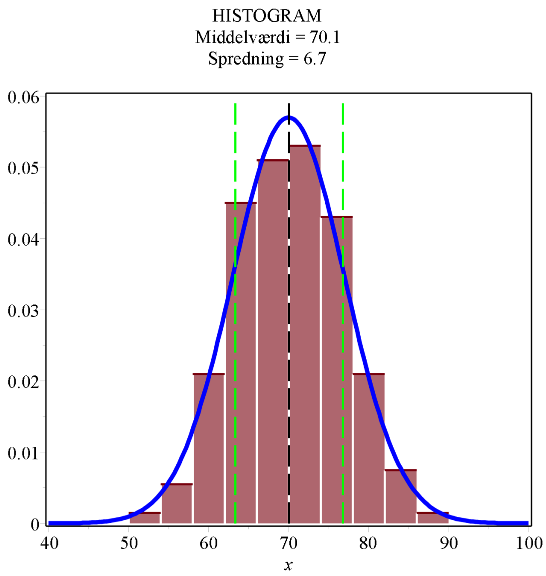
$kvartiler(M) = [65.07, 70.08, 74.98]$

$\mu := middel(M) = 70.0800000000000$

$var := varians(M) = 45.2096000000000$

$\sigma := spredning(M) = 6.72380844462422$

I histogrammet nedenfor er lodrette streger tegnet i $\mu, \mu - \sigma$ og $\mu + \sigma$



I intervallet $[\mu - \sigma,\ \mu + \sigma]$ befinder der sig ca. 66% af alle observationer - som denne udregning viser:

$$\mathit{sumkurve}(M, \mu + \sigma) - \mathit{sumkurve}(M, \mu - \sigma) = 0.655535143126932$$

15.4 Frekvensfunktionen for normalfordelingen

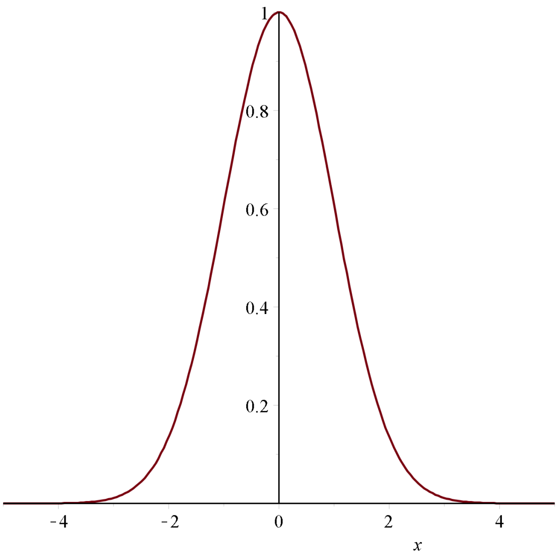
I det følgende skal vi lave forskriften for denne klokkeformede kurve. Et godt udgangspunkt er funktionen

$$f := x \rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} x^2}$$

$$x \rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} x^2} \tag{15.2}$$

der har den ønskede klokkeform. En forskydning og en deformation får den til at ligne den blå klokkekurve ovenfor:

$plot(f(x), x=-5..5)$



I al fald må klokkekurven opfylde, at arealet under kurven skal være 1 - ligesom histogrammet. Vi bestemmer dette areal

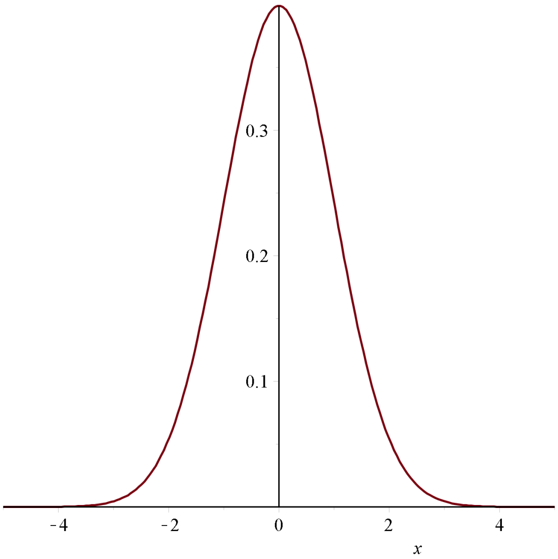
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\sqrt{\pi}$$

Dette viser, at f skal modificeres en smule:

$$\varphi := x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}:$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Så ved at bruge φ i stedet, er kravet om at arealet skal være 1 opfyldt. Sådan ser grafen for φ ud:
$plot(\varphi(x), x=-5..5)$



Det er klart, at φ efterligner et udglattet histogram med middelværdi $\mu = 0$, men hvad er spredningen? For at få en ide om dette, husker vi på, at i ovenstående histogram var ca. 66% af alle observationer i intervallet $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$. Her skal vi så sikre os, at ca. 66% af arealet under φ liger i det tilsvarende interval:

$$fsolve\left(\int_{-s}^{s} \varphi(x)\,dx = 0.66, s = 0..2\right) = 0.9541652531$$

Dette tyder på, at spredningen her (ideelt set) er $\sigma = 1$. φ kaldes derfor for *frekvensfunktionen* for normalfordelingen med middelværdi 0 og spredning 1.

Lad os lige udregne, hvor mange procent af observationerne vi ideelt set skal forvente i $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, hvis data er normalfordelt:

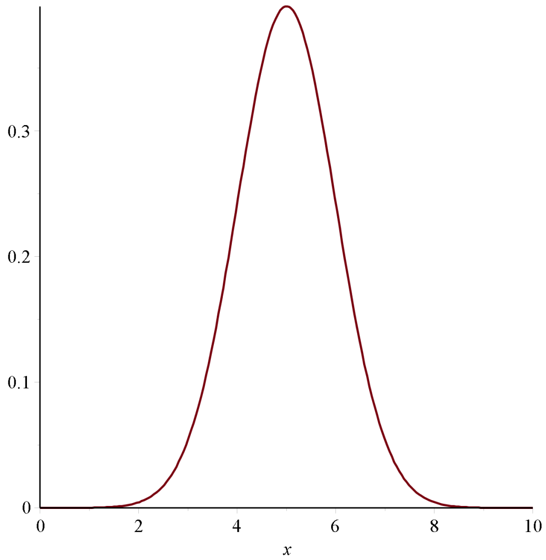
$$evalf_4\left(\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx\right) = 0.6827$$

Dvs., hvis data er normalfordelte, må vi forvente, at ca. 68.3% af alle observationer befinder sig i intervallet $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$.

Nu mangler vi blot at få klokkekurven forskudt og deformeret så den matcher histogrammet vi har set på i de foregående afsnit. Det er ganske let at forskyde en graf langs x-aksen. Fx laver du en forskydning af φ på 5 til højre ved at udregne

$\varphi(x-5)$:

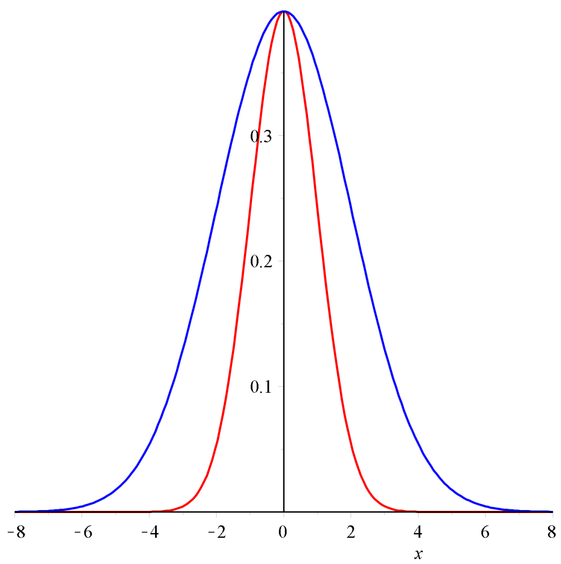
$plot(\varphi(x-5), x=0..10)$



Deformationen sker ved at gange en (positiv) faktor på x. Hvis denne faktor er større end 1, bliver klokkekurven smallere, mens den bliver bredere, hvis faktoren er mindre end 1. Eksperimenter med dette.

Lad os fx prøve med faktoren $\frac{1}{2}$:

$plot\left(\left[\varphi(x), \varphi\left(\frac{1}{2}\,x\right)\right], x=-8..8, color=[red, blue]\right)$

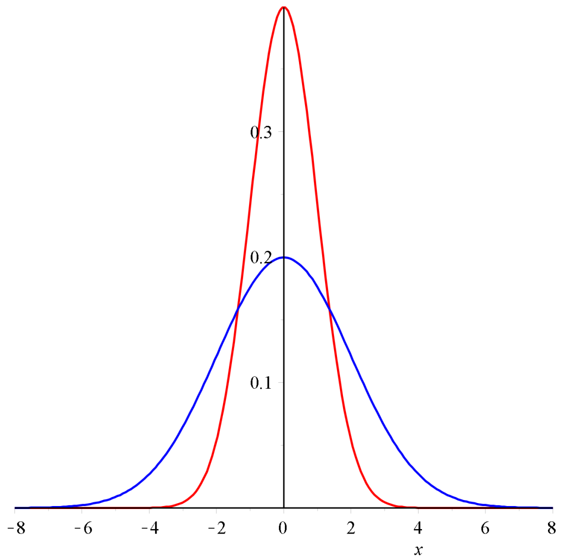


Men arealet er tilsyneladende blevet større:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \mathrm{d}x = 2$$

- præcist dobbelt stort. Da arealet under kurven skal være 1, er vi nødt til at gange $\frac{1}{2}$ på funktionen:

$$plot\left(\left[\varphi(x), \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right)\right], x=-8..8, color=[red, blue]\right)$$



Lad os finde spredningen i den deformerede kurve. Vi husker på, at 68% af arealet skal ligge i intervallet $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$:

$$fsolve\left(\int_{-s}^{s} \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \mathrm{d}x = 0.683, s=0..4\right) = 2.001283658$$

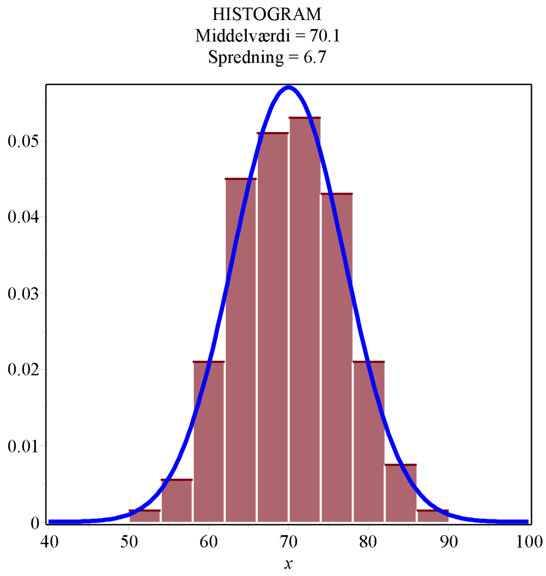
Herfra er der ikke langt til at konkludere, at deformationen

$$\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\cdot x\right)$$

giver en klokkekurve med middelværdi 0 og spredning σ. Kombinerer vi dette med en vandret forskydning på μ, har vi en klokkekurve med middelværdi μ og spredning σ:

$$\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\cdot(x-\mu)\right)$$

$$plots[display]\left(plotHistogram(M), plot\left(\frac{1}{7}\,\varphi\left(\frac{1}{7}(x-70)\right), x=40..100, color=blue, thickness=3\right)\right)$$



Inden du går videre er det vigtigt at få renset μ. Det klarer du i Variables-paletten eller med kommandoerne:

μ :='μ': σ :='σ':

Med rensede μ og σ kan vi få beregnet det generelle udtryk for en klokkekurve med middelværdi μ og spredning σ:

$$\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\cdot(x-\mu)\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{\pi}}$$

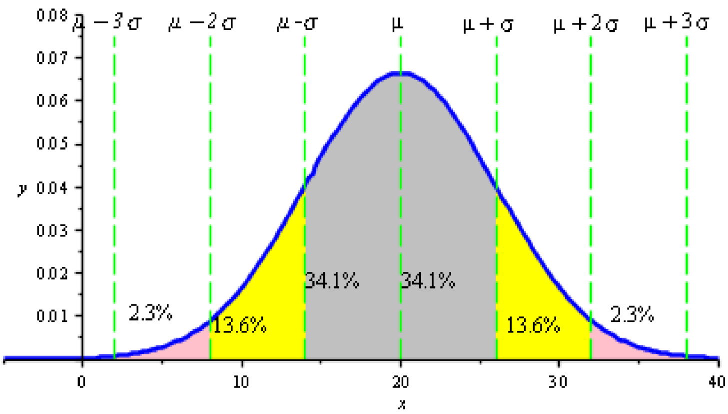
Det er ikke helt sådan, du vil møde den i bøger, men den ligner. Der skal omskrives en smule - og denne funktion kalder vi ϕ:

$$\phi := x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

$$x \to \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \qquad (15.3)$$

På figuren nedenfor ser du, hvordan observationerne ideelt set skal fordele sig omkring middelværdien (i eksemplet er $\mu = 20$ og $\sigma = 6$):

- I intervallet $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ befinder sig 68.3% af observationerne
- I intervallet $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ befinder sig 95.4% af observationerne
- I intervallet $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ befinder sig 99.7% af observationerne



Lad os for en god ordens skyld regne efter (vi sætter midlertidigt $\mu = 20$ og $\sigma = 6$):

$\mu := 20 : \sigma := 6 :$

$$evalf\left(\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \phi(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0.6826894920$$

$$evalf\left(\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \phi(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0.9544997360$$

$$evalf\left(\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} \phi(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0.9973002039$$

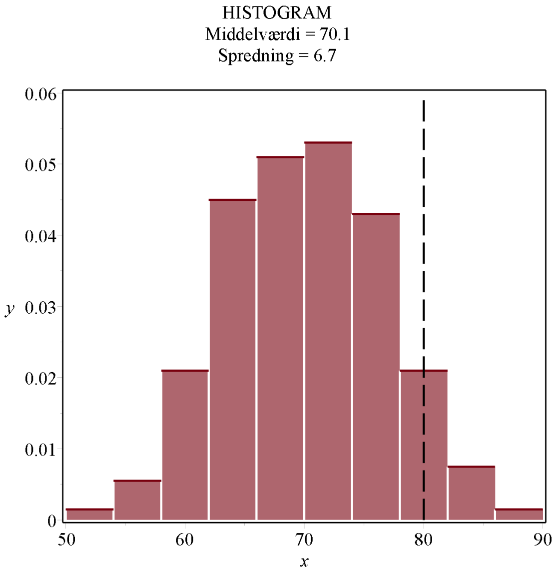
$\mu :=$'μ': $\sigma :=$'σ': *#rens μ og σ*

15.5 Normalfordelingsfunktionen

Vi minder om, at sumkurven F for et materiale er defineret ved:

$$F(x) = \text{den procentdel af observationerne, der er mindre end eller lig med } x.$$

eller sagt på en anden måde: arealet af den del af histogrammet der ligger til venstre for x. Dette kan illustreres således, $F(80)$ er arealet af det (røde) område, der ligger til venstre for den stiplede streg i 80:



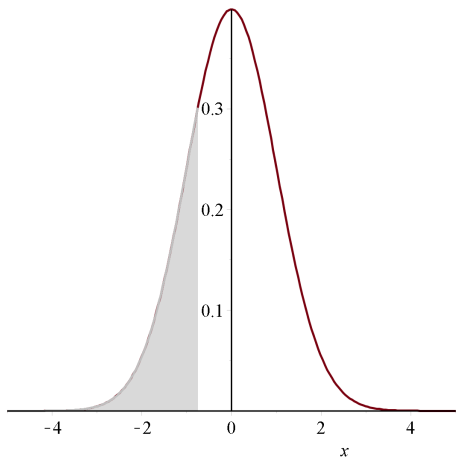
Lad os for en god ordens skyld regne arealet ud. På figuren ses, at arealet kan bestemmes som summen af arealerne af de 7 første stolper plus halvdelen af den 8. Men dette areal er jo netop værdien *sumkurve*:

sumkurve$(M, 80)$ = 0.922000000000000

I nøje analogi hermed defineres fordelingsfunktionen $\Phi(x)$ som arealet under grafen for

$$\varphi := x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}:$$

til venstre for x:



Vi definerer derfor Φ som en arealfunktion for φ (med udgangspunkt i $-\infty$)

$$\Phi := x \to \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

$$x \to \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, \mathrm{d}t \tag{15.4}$$

Vi kan ikke udtrykke en stamfunktion til φ med de funktioner, vi kender, så vi tager til takke med forskriften i **(15.4)**

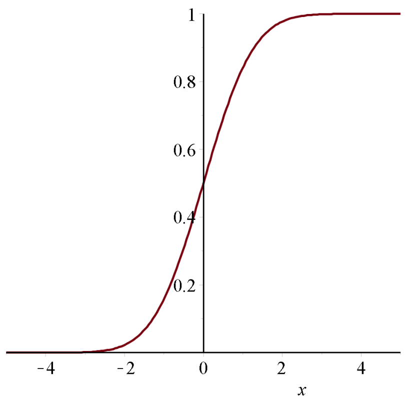
Værdier kan sagtens udregnes (men indsætter du hele tal (dog ikke 0) får du et fælt udtryk, men så må du jo bruge *evalf*:

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$evalf(\Phi(1)) = 0.8413447455$$

Grafen for Φ ser sådan ud

$plot(\Phi(x), x = -5 ..5)$



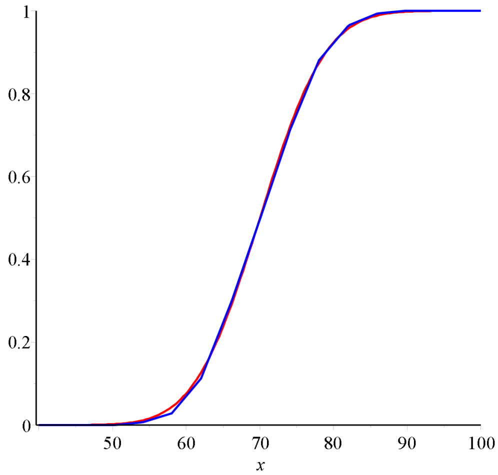
Denne forskydes og deformeres på helt samme måde som φ. Lad os døbe den funktion, der fremkommer, F:

$$F := x \to \Phi\left(\frac{1}{\sigma} \cdot (x - \mu)\right)$$

$$x \to \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \tag{15.5}$$

Den fordelingsfunktion, der matcher sumkurven i ovenstående eksempel, er således $\Phi\left(\frac{1}{7}\cdot(x-70)\right)$. Indtegnet i samme koordinatsystem ser de to kurver sådan ud:

$plot\left(\left[\Phi\left(\frac{1}{7}\cdot(x-70)\right), sumkurve(M,x)\right], x=40..100, color=[red, blue]\right)$



15.6 Normalfordelingen i Gym-pakken

Frekvensfordelingen for en normalfordeling med middelværdi μ og spredning σ findes i Gym-pakken under navnet *normalpdf*, hvor 'pdf' står for 'propability distribution function'. Syntaksen er

$$normalpdf(\mu, \sigma, x)$$

Tilsvarende findes fordelingsfunktionen under navnet *normalcdf*, hvor 'cdf' står for 'cumulative distribution function'. Syntaksen er

$$normalcdf(\mu, \sigma, x)$$

Hvis μ og og σ udelades, så sættes de automatisk til hhv. $\mu = 0$ og $\sigma = 1$.

Eksempel

Hvis man vejer et stort antal poser med mel, har det vist sig, at vægten er normalfordelt med middelværdi $\mu = 500$ g og spredning $\sigma = 20$ g.

1. Hvor stor en del af poserne vejer højst 515 g?$normalcdf(500, 20, 515) = 0.7733726476$

Dvs., at 77.3% af poserne vejer højst 515 g.

2. Hvor stor en del af poserne vejer mindst 475 g?

$normalcdf(500, 20, 475) = 0.1056497738$

Altså vejer 10.6% af poserne højst 475 g. Dvs 89.4% vejer mindst 475 g.

Du kan naturligvis klare det i et hug ved at udregne

$1 - normalcdf(500, 20, 475) = 0.8943502262$

3. Hvor stor en del af poserne vejer mellem 495 g og 505 g?

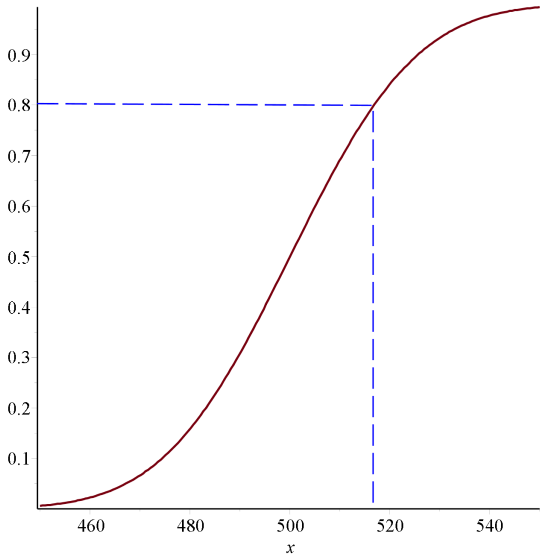
$normalcdf(500, 20, 505) - normalcdf(500, 20, 495) = 0.1974126512$

Altså 19.7% af poserne vejer mellem 495 g og 505 g.

4. Hvor meget vejer de tungeste 20% af poserne ?

Lad os først tegne grafen for $normalcdf(500, 20, x)$:

$plot(normalcdf(500, 20, x), x = 450..550)$



Ved aflæsning på grafen, kan vi se, at de 20% tungeste poser vejer mindst 516 g.

For at beregne os frem til resultatet, skal vi løse ligningen

$normalcdf(500, 20, x) = 0.8$

Denne ligning kan være lidt drilsk at løse, men med fsolve udstyret med søgeinterval går det:

$fsolve(normalcdf(500, 20, x) = 0.8, x = 500..540)$

$$516.8324245 \tag{15.6}$$

Det, vi finder her, kaldes 0.8-fraktilen. I Gym-pakken er der en funktion til bestemmelse af fraktiler i normalfordelingen

$invnorm(500, 20, 0.8) = 516.832424671467$

Og her går det helt problemfrit.

16 Stokastiske variable (Avanceret)

16.1 Stokastiske variable i Maple

Stokastiske variable i Maple er ganske avanceret og gennemtænkt. Hvis du kun skal bruge binomialfordelte og normalfordelte stokastiske variable til at regne nogle opgaver, kan du roligt springe dette afsnit over og nøjes med eksemplerne i de foregående afsnit.

Binomialfordelte stokastiske variable

Definitionen af en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p sker således:

$with(Statistics):$

Først fastlægges fordelingen
$F := Binomial(n, p)$

$$Binomial(n, p) \tag{16.1}$$

Dernæst defineres en stokastisk variabel (eng: random variable) med denne fordeling
$X := RandomVariable(F)$

$$\_R \tag{16.2}$$

Herefter er bl.a. sandsynlighedsfunktionen på plads

$ProbabilityFunction(X, r)$

$$\begin{cases} 0 & r < 0 \\ \mathrm{binomial}(n, r)\, p^r\, (1-p)^{n-r} & otherwise \end{cases} \tag{16.3}$$

Maple kender også formlerne for middelværdi, varians og spredning:

$Mean(X) = n\,p$

$Variance(X) = n\,p\,(1-p)$

$StandardDeviation(X) = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$

Derimod er fordelingsfunktion ikke helt som forventet (fjern : og tast enter for at se udtrykket)

$CDF(X, t):$

men den virker fint nok - se anvendelse i eksempel 1 nedenfor.

Normalfordelte stokastiske variable

Det går efter helt samme melodi at definere stokastiske variable med en anden fordeling end binomialfordelingen. Skal du fx bruge en normalfordelt stokastisk variabel Y med middelværdi μ og spredning σ, laver du den således:

$Y := RandomVariable(Normal(\mu, \sigma)):$

Funktionen, vi tidligere har kaldt $\phi(x)$, hedder i Maplesyntaks $PDF(Y, x)$, hvor PDF står for Probability Density Function.

Funktionen $\Phi(x)$ hedder i Maplesyntaks $CDF(Y, x)$, hvor CDF står for Cumulative Distribution Function.

Se eksempel 3 og 4 nedenfor som eksempler på anvendelse.

16.2 Normalapproksimationen

Når antalsparameteren i en binomialfordeling bliver stor, bliver binomialfordelingen tung at arbejde med, idet binomialkoefficienterne $binom(n, r)$ vokser så voldsomt, at de fleste CAS værktøjer giver op. Så benyttes i stedet en approksimation med en normalfordeling.

Vi viser i et lille eksempel, hvordan det foregår:

Lad $X \sim bi(20, 0.5)$.

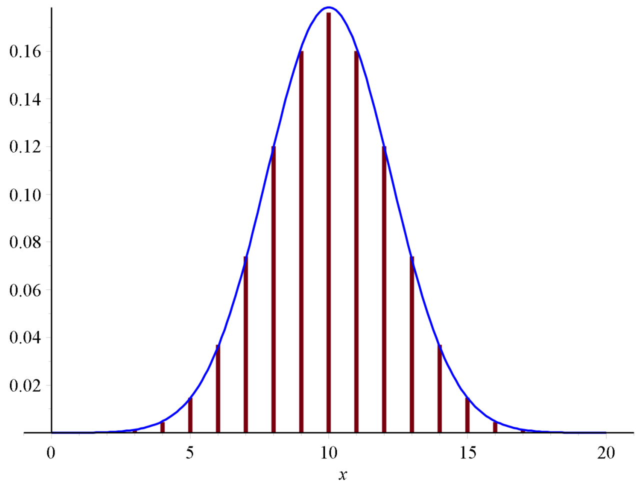
Middelværdien er $\mu = 20 \cdot 0.5 = 10$ og spredningen er $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \sqrt{5}$.

Lad Y være en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi 10 og spredning $\sqrt{5}$ - dvs.
$Y \sim N\left(10, \sqrt{5}\right)$.$with(Statistics)$:

$X := RandomVariable(Binomial(20, 0.5))$:

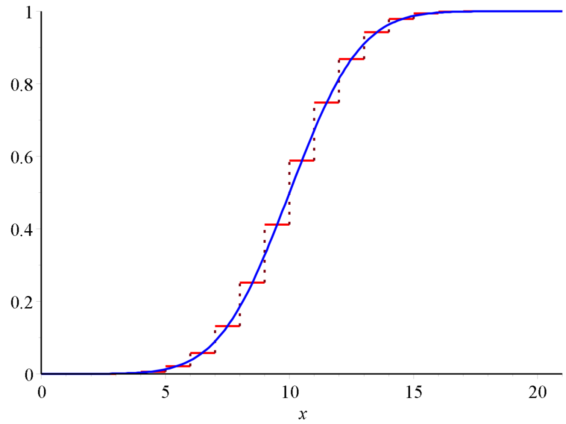
$Y := RandomVariable\left(Normal\left(10, \sqrt{5}\right)\right)$:

Vi tegner pindediagrammet for X sammen med frekvensfunktionen for Y (den hedder i Maple $PDF(Y, x)$):
$plots[display]([pindediagramBIN(20, 0.5), plot(PDF(Y, x), x = 0..20, color = blue)])$



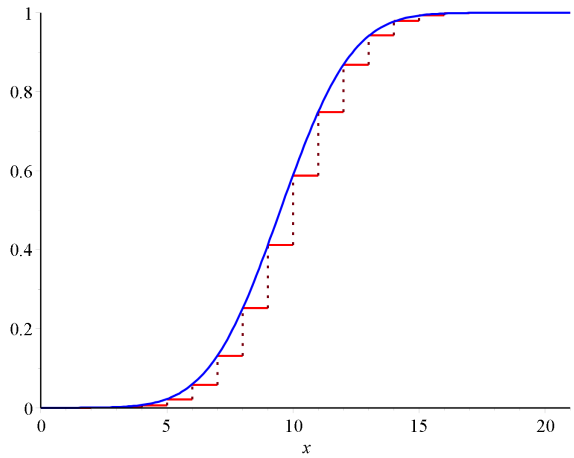
Det passer jo meget fint - og det selvom $n = 20$ ikke just er stor. Lad os også tegne fordelingsfunktionerne for X og Y i samme koordinatsystem.

$plots[display]([trappekurveBIN(20, 0.5), plot(CDF(Y, x), x = 0..21, color = blue)])$



Vi ser, at blå normalfordeling falder midt i trinnene i trappekurven. Forskyder vi normalfordelingen med $\frac{1}{2}$ til venstre vil værdierne i punkterne $0, 1, 2, \ldots, 20$ passe nogenlunde:

$$plots[display]\left(\left[trappekurveBIN(20, 0.5), plot\left(CDF\left(Y, x+\frac{1}{2}\right), x = 0..21, color = blue\right)\right]\right)$$



Vi har altså approksimationen:

$$\backslash 011 P(X \leq x) \approx CDF\left(Y, x+\frac{1}{2}\right)$$

hvor $X \sim bi(n, p)$ og $Y \sim N(\mu, \sigma)$. μ og σ er middelværdien og spredningen i binomialfordelingen.

17 Binomialtest

17.1 Ensidet test

En stikprøve kan i princippet udtages på to forskellige måder:

- **med tilbagelægning**.
  Her udvælges elementerne ét ad gangen. Det udtagne elements egenskab (ok eller defekt) noteres, og elementet lægges tilbage. Elementerne blandes før næste element udtages. Det samme element kan således optræde flere gange i stikprøven.
- **uden tilbagelægning**.
  Her udvælges alle elementer på én gang, så et element højst kan indgå én gang i stikprøven.

Vi skal her kun se på stikprøver med tilbagelægning, idet disse kan beskrives som binomialeksperimenter.

Hvis der er (rigtig) mange elementer i populationen, hvorfra stikprøven udtages, er det i praksis uvæsentligt, om det sker med eller uden tilbagelægning, som i dette eksempel:

En frøproducent garanterer, at mindst 80% af de frø, han leverer, spirer.

Vi vil undersøge denne påstand ved at udtage en stikprøve på 50 frø, og se, hvordan disse frø spirer. Hvis flere end 80% af frøene spirer, vil vi være tilfredse og godtage garantien, men hvis færre end 80% spirer, er sagen mere kritisk.

Nu viser det sig imidlertid, at 37 frø spirer. Hvordan vi skal forholde os til det i lyset af, at 80% af 50 jo er 40.

Matematisk går man sådan til værks:

Vi ønsker at **teste hypotesen**:

H_0: 80% af frøene spirer

mod **alternativet**

H_1: mindre end 80% af frøene spirer

ved at udtage en stikprøve på 50 frø.

Vi kan naturligvis ikke på grundlag af stikprøven bevise om hypotesen er sand eller falsk. Vi kan kun vurdere den fremsatte påstand og komme med en af følgende to konklusioner:

H_0 må forkastes på det foreliggende grundlag

H_0 kan ikke forkastes på det foreliggende grundlag.

Lad X være den stokastiske variabel:

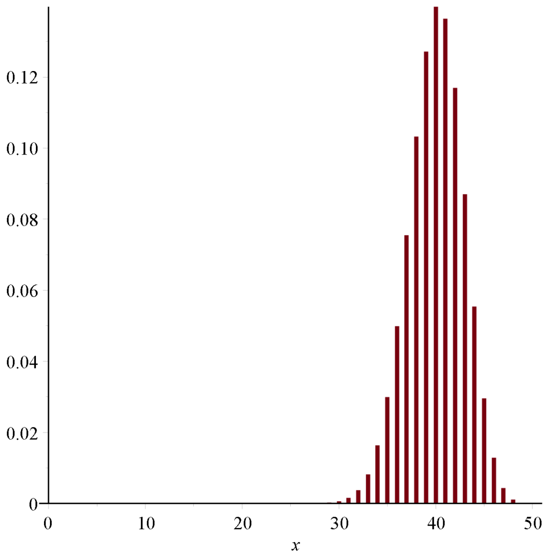
$X =$ antal frø der spirer ud af de 50 udtagne.

Hvis hypotesen H_0 holder, er $X \sim bi(50, 0.80)$.

Middelværdien af X er $n \cdot p = 50 \cdot 0.80 = 40$, hvilket svarer til 80% af stikprøven. Vi skal nu afgøre, hvor stor en afvigelse fra 40, vi vil acceptere - eller med andre ord, hvor langt skal vi under 40 før at vi vil forkaste hypotesen.

Lad os definere X, og tage et kig på pindediagrammet

with(*Gym*) :
pindediagramBIN(50, 0.8)



(17.1)

Pindediagrammet viser, at der er ganske meget sandsynlighed 'under' 40 - helt præcist

bincdf(50, 0.8, 39) = 0.4164405815

- eller med andre ord, så er der en sandsynlighed på ca 0.42 for at færre end 40 frø spirer.

Lad os sige, at fx 37 er det mindste vi vil acceptere. Så testens **kritiske mængde** er

$K = \{0, 1, 2, \ldots, 37\}$

og **testens acceptmængde** er

$A = \{38, 39, \ldots, 50\}$

Et udfald i den kritiske mængde fører til, at vi vil forkaste hypotesen. Når den kritiske mængde, som her, ligger i venstre side, kaldes testen **venstresidet**.

Ved en hypotesetest kan vi begå to fejl:

	H_0 forkastes	H_0 forkastes ikke
H_0 er sand	fejl af 1. art	OK
H_0 er falsk	OK	fejl af 2. art

Med ovenstående valg af kritisk mængde, er sandsynligheden for fejl af 1. art

bincdf(50, 0.8, 37) = 0.1860569935

Dvs., at der er over 18% sandsynlighed for, at vi forkaster hypotesen selvom den er sand! En så stor sandsynlighed for fejl af 1. art anses for uacceptabel, så vores kritiske mængde er for stor.

Normalt fastlægger man den kritiske mængde ved på forhånd at vedtage, hvor stor en sandsynlighed for fejl af 1. art, man vil tillade. Denne sandsynlighed kaldes for testens **signifikansniveau**. Som regel vælger man her 5%. Fejl af 2. art vender vi tilbage til senere.

Vi skal altså her bestemme den største observation, hvis kummulerede sandsynlighed er mindre end eller lig med 0.05. Vi kan naturligvis prøve os frem, men Gym-pakken indeholder funktion *invbin*, der netop er beregnet til dette

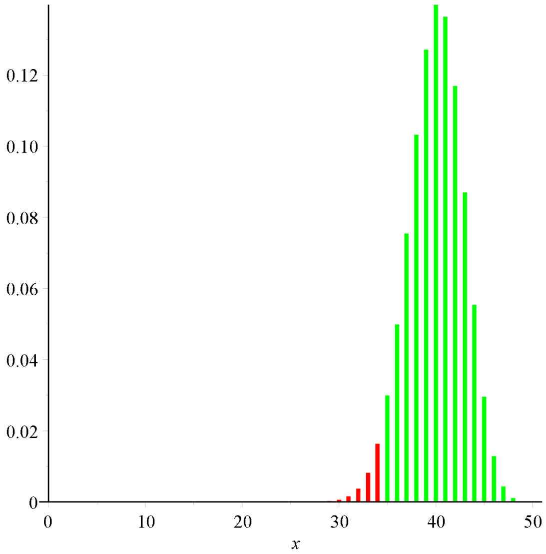
$invbin(50, 0.8, 0.05) = 35.$

returnerer.

Alt ialt vil en venstresidet test af hypotesen på signifikansniveau 5% føre til, at den kritiske mængde bliver $K = \{0, 1, \ldots, 34\}$.

Et pindediagram, der viser den kritiske mænge og acceptmængden ved denne venstesidede test, kan se sådan ud, hvor summen af de røde pinde er mindre end 0.05 (signifikansniveauet):

$binomialTest(50, .8, 0.05, venstre)$



17.2 Tosidet test

Vi skal checke, om en mønt er symmetrisk. Vi fremsætter hypotesen

$$H_0 : \ p = \frac{1}{2}$$

hvor p er sandsynligheden for at mønten viser krone. Hypotesen testes ved at kaste mønten 40 gange og tælle antallet af gange mønten viser krone. Signifikansniveauet skal være 5%.

Lad X være den sokastiske variable, der tæller antallet af krone ved 40 kast med mønten. Holder hypotesen H_0, vil X være binomialfordelt $X \sim bi\left(40, \frac{1}{2}\right)$.

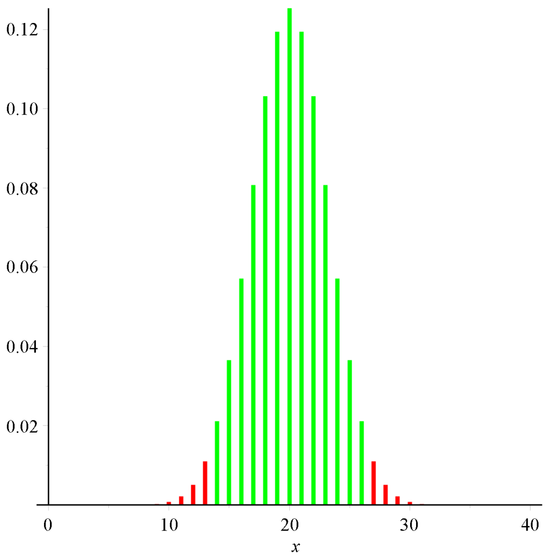
Det er klart, at såvel små som store værdier af X vil være kritiske for hypotesen $p = \frac{1}{2}$. Den kritiske mængde må derfor ligge dels til venste, og dels til højre i fordelingen. Vi placerer 2½% i begge sider.

$$invbin\left(40, \frac{1}{2}, 0.025\right) = 14.$$

$$invbin\left(40, \frac{1}{2}, 0.975\right) = 26.$$

Den kritiske mængde er således $K = \{0, 1, \ldots, 13\} \cup \{27, 28, \ldots, 40\}$

$binomialTest(40, 0.5, 0.05, tosidet)$



17.3 Fejl af 1. og 2. art

(Kilde: Tommy Borch, Statistik, FAG, 1981)

Det klassiske eksempel her er en person (Carl) der hævder, at han kan smage forskel på en Carlsberg og en Tuborg - ikke hver gang, men 3 ud af 4 gange.

Det tror vi ikke på, og vil derfor teste Carls evner ved at lade ham blindsmage et antal glas øl og fortælle, om der er Carlsberg eller Tuborg i glasset.

Vi forsøger først med 12 glas, og opstiller den hypotese, at det er helt tilfældigt, om Carl rammer rigtigt

$$H_0: \quad p = \frac{1}{2}$$

Her overfor står Carls alternative hypotese

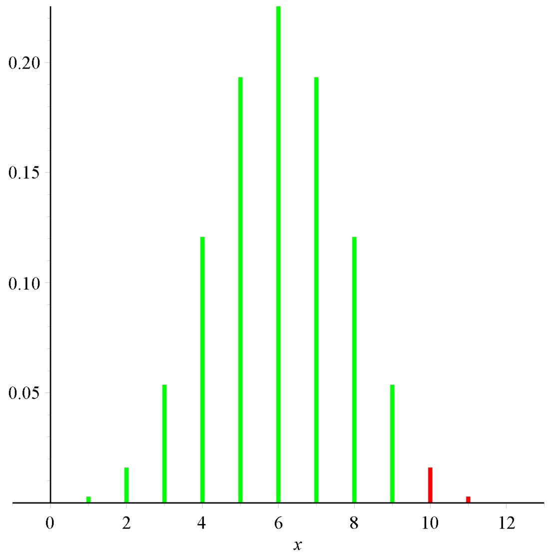
$$H_1: \quad p \geq \frac{3}{4}$$

Testen er højresidet, idet et stort antal rigtige svar er kritiske for H_0, og taler til gunst Carls alternative hypotese. Signifikansniveauet er 5%.

$invbin(12, 0.5, 0.95) = 9.$

Dvs., at den kritiske mængde er $K = \{10, 11, 12\}$.

$binomialTest(12, 0.5, 0.05, højre)$



Sandsynligheden for fejl af 1. art er :

$1 - bincdf(12, 0.5, 9) = 0.0192871094$

- altså 1.9%.

Hvad er så sandsynligheden for fejl af 2. art, altså hvor vi accepterer vores hypotese H_0, selvom H_1 faktisk er sand.Hertil skal vi beregne sandsynligheden for at havne i vores acceptmængde $\{0, 1, ..., 9\}$ under forudsætning af, at Carls alternative hypotese holder - dvs. $p = \frac{3}{4}$ $.bincdf(12, 0.75, 9) = 0.6093249917$

-altså er sandsynligheden for fejl af 2. art ca. 61%. Dette er naturligvis helt uacceptabelt for Carl, så denne sandsynlighed skal gøres mindre. Dette kan ske ved at vi ændrer den kritiske mængde, men så gør vi jo sandsynligheden for fejl af 1. art større.

Der er kun ét at gøre: Øge antallet af prøvesmagninger. Lad os prøve med 24:

$invbin(24, 0.5, 0.95)$

Dvs $K = \{17, 18, ..., 24\}$, og sandsynligheden for fejl af 1. art er

$1 - bincdf(24, 0.5, 17) = 0.0113279223$

Sandsynligheden for fejl af 2. art er så

$bincdf(24, 0.75, 16) = 0.2337958307$

Dette er også for meget! Prøv selv at finde det antal prøvesmagninger, der skal til, for at få sandsynligheden for fejl af 1. art og 2. art under 5%.

.

17.4 Oversigt

Hypotese	Alternativ	Testtype
$H_0: \ p = p_0$	$H_1: \ p \neq p_0$	**Tosidet test** $K = \{0, 1, ..., c_1\} \cup \{c_2, ..., n\}$ $c_1 = invbin\left(n, p, \frac{\alpha}{2}\right) - 1$ $c_2 = invbin\left(n, p, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) + 1$
	$H_1: \ p > p_0$	**Højresidet test** $K = \{c, ..., n\}$ $c = invbin(n, p, 1 - \alpha) - 1$
	$H_1: \ p < p_0$	**Venstresidet test** $K = \{0, ..., c\}$ $c = invbin(n, p, \alpha) - 1$