Maple 17 A-Niveau

Indhold

1 2D-vektorer i Maple

1.1 Gympakken

with(*Gym*)

$$[ChiKvadratGOFtest, ChiKvadratUtest, Cos, ExpReg, LinReg, LogistReg, PolyReg, PowReg, PropReg, Sin, Tan, antalobs, antalstabel, arealP, arealT, bidrag, binomialTest, boksplot, cart2pol, chicdf, chipdf, det, dotP, ev, forventet, fraktil, frekvens, frekvensTabel, gennemsnit, grupperData, hat, hyppighed, invCos, invSin, invTan, invchi, invnorm, invt, kumuleretFrekvens, kvartiler, len, median, middel, normalcdf, normalpdf, pindediagramBIN, plotHistogram, plotPindediagram, plotResidualer, plotSumkurve, plotTrappekurve, pol2cart, proj, residualer, spredning, sumkurve, tInterval, tTest, tcdf, testLin, tpdf, trappekurve, trappekurveBIN, typeinterval, typetal, varians, vinkel, visMatrix, vsolve, zInterval, zInterval1Andel, zTest] \tag{1.1}$$

Du skal have Gym-pakken installeret før du kan bruge dette dokument. I Gympakken er der en række funktioner, der gør arbejdet med vektorer mere bekvemt:

navn	syntaks	handling
arealP	$arealP(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner arealet af det parallelogram der er udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$
arealT	$arealT(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner arealet af den trekant der er udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$
cart2pol	$cart2pol([r, v])$	Beregner $\vec{a}$'s polære koordinater
det	$det(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner determinanten af vektorparret $\vec{a}$ og $\vec{b}$
dotP	$dotP(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner skalarproduktet af vektorparret $\vec{a}$ og $\vec{b}$ **OBS:** Skalarproduktet mellem to vektorer kan udregnes som $\vec{a}.\vec{b}$, men denne implementation benytte det komplekse skalarprodukt, og kan give utilsigtede resultater i symbolske beregninger.
ev	$ev(\vec{a})$	Beregner en enhedsvektor ensrettet med $\vec{a}$
hat	$hat(\vec{a})$	Beregner tværvektoren til $\vec{a}$
len	$len(\vec{a})$	Beregner længden af $\vec{a}$
pol2cart	$pol2cart(\vec{a})$	Beregner de cartesiske koordinater til en vektor med de polære koordinater $[r, v]$.
proj	$proj(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$
vinkel	$vinkel(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$

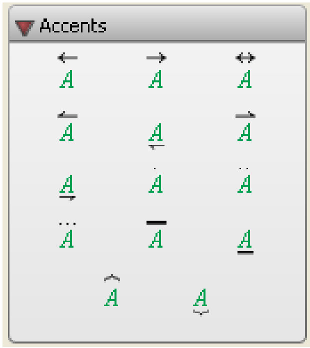
1.2 Indtastning af vektorer

Du taster nemmest en vektor ind i Maple vha. ulighedstegnene: < og >. Fx vil

$$a := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

definere en vektor med navnet a og koordinaterne $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vil du have pile over vektorerne, så er det også muligt. Start med at åbne paletten **Accents** via menuvalget **View** > **Palettes** > **Show Palette** > **Accents**. Paletten, du får frem, ser således ud:



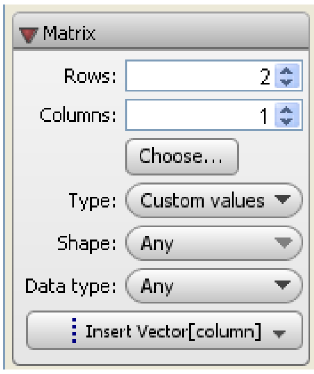
Når du skal skrive en vektor med denne skabelon, trykker du først på vektorsymbolet $\vec{A}$, og skabelonen indsættes. Skriv herefter vektorens navn, og afslut med pil-højre. Fx

$$\vec{a} := \langle 4, 5 \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

OBS:

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ defineret ovenfor og vektoren $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ har intet med hinanden at gøre. Det er to forskellige vektorer. Så, hvis du vil bruge vektorpile, så bør du gøre det konsekvent.

Som alternativ til $\langle\,\rangle$ i forbindelse med indtastning af en vektor, kan du benytte Matrix-paletten, hvor indstillingen skal være som vist her:

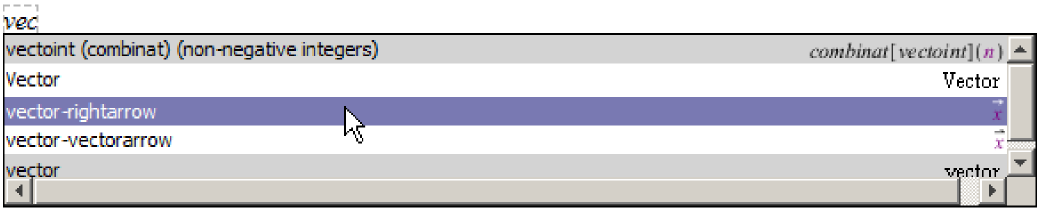


Tryk på **Insert Vector[column]**, og du får en vektor skabelon som denne $\begin{bmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \end{bmatrix}$. $\vec{a}$ kan så defineres således:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Og endelig kan du benytte Maples smarte 'command-completition' til at få en vektor skabelon frem uden at skulle have fat i musen. Du gør sådan her:

Indtast *vec* og tryk derefter på Esc-knappen, så får du en liste af muligheder frem. Tryk **to gange** på pil-ned knappen og tast Enter:



Du kan spare en masse tastearbejde ved at gøre det til en vane at benytte 'command-completition' - også til alle mulige andre kommandoer.

Når du taster, vil en tooltip poppe op, når Maple entydigt kan identificere, hvad du er i gang med at skrive. Tast Enter, når du ser et tooltippet, og den fulde kommando vil blive indsat.

1.3 Regning med vektorer

Regning med vektorer går helt som forventet

$$\vec{a} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle -4, 5 \rangle = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Skal du have fat i en af koordinaterne for $\vec{a}$, fx $\vec{a}_1$, så skriver du $\vec{a}$Ctrl_1 (du skal have 3 taster i sving for at lave indekset: Hold Ctrl og Shift nede samtidigt og tryk på -).

$$\vec{a}_1 = 2$$

Du kan naturligvis også arbejde med symbolske vektorer. Men her skal du passe på, hvis du ikke sætter pile over dine vektorer.

Derfor: Sæt altid pil over dine vektorer

cirkulær reference - kun hvis du ikke bruger pile

Du kan **ikke** definere en vektor v ved $v := \langle v_1, v_2 \rangle$, hvor v_1 er skrevet med et indeks (som beskrevet ovenfor). Dette vil nemlig give en cirkulær reference (der står jo, at v's førstekoordinat er v_1 - altså v's førstekoordinat)

$v := \langle v_1, v_2 \rangle$

Error, recursive assignment

Derimod kan du godt skrive $v := \langle v_1, v_2 \rangle$, hvis du benytter et såkaldt 'literal index'. Her skal du indtaste indeks som v__ (altså dobbelt understreg). Variabler med literal indeks blive lyserøde.

$$v := \langle v_1, v_2 \rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Det er også helt fint at definere en vektor ved $\vec{u} := \langle u_1, u_2 \rangle$ - hvad enten du skriver indeks på den ene eller den anden måde:

$$\vec{u} := \langle u_1, u_2 \rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} := \langle u_1, u_2 \rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

1.4 Punkter og stedvektorer

Det er bekvemt, at beskrive punkter ved lister $A = [a_1, a_2]$. Punktets stedvektor $\overrightarrow{OA} = \langle a_1, a_2 \rangle$ kan da fastlægges som $\overrightarrow{OA} = \langle A \rangle$.

Har du givet to punkter ved $A = (4, 7)$ og $B = (10, 2)$, kan disse defineres i Maple ved

$A := [4, 7] = [4, 7]$

$B := [10, 2] = [10, 2]$

de tilhørende stedvektorer fastlægges ved

$$\overrightarrow{OA} := \langle A \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} := \langle B \rangle = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vektor $\overrightarrow{AB}$ kan bestemmes ved (husk, at det er B's koordinater minus A's koordinater):

$$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Du kan også let finde fx midtpunktet M af linjestykket AB på denne måde:

$$\overrightarrow{OM} := \frac{1}{2} \cdot \langle A + B \rangle = \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

OBS: Ofte vil du få flere punkter i spil, og vil du definere et punkt D, så får du problemer

$D := [5, 6]$

Error, attempting to assign to `D` which is protected. Try declaring `local D`; see ?protect for details.

Fejlmeddelelsen fortæller, at D er et beskyttet bogstav - det benyttes i forbindelse med differentialregning. I Maple 17 kan du definere en lokal udgave af D:

local $D := [5, 6]$:

(skriv blol local D i math-mode, så vil Maple selv formatere, så local står med fed skrift)

Her er det en rigtig god ide at undertrykke output med kolon. Prøv uden kolon og læs advarslen.

Herefter kan D bruges som ethvert andet punkt:

$$\overrightarrow{OD} := \langle D \rangle = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1.5 Længden af en vektor

Længden af en vektor beregnes vha. funktionen *len*, der findes i Gym-pakken. Her er et par eksempler på, hvordan den virker (husk, Gym-pakken skal være indlæst)

$$\vec{a} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$len(\vec{a}) = \sqrt{13}$$

$$len(\langle x, y \rangle) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

OBS

Det giver **ikke** mening at udregne $|\vec{a}|$ i Maple.

1.6 Polære koordinarer

De polære koordinater for en vektor $\vec{v}$ er en liste $[r, u]$, hvor r er længden af $\vec{v}$ og u er vinklen fra x-aksen til $\vec{v}$ (regnet med fortegn). Naturligvis benytter vi den repræsentant for $\vec{v}$, der er placeret som en stedvektor. Læg mærke til, at vi bruger samme notation til polære koordinater som vi bruger til punkters koordinater - det er konteksten, der afgør, hvad der menes i en given sammenhæng.

Det er ganske simpelt at omregne fra rektangulære koordinater (cartesiske koordinater) til polære koordinater (husk, Gym-pakken skal være indlæst):

$$\vec{v} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$cart2pol(\vec{v}) = [\sqrt{13}, 56.309]$$

Dette viser, at længden af $\vec{v}$ er $\sqrt{13}$ og at $\vec{v}$ danner en vinkel på 56.3° med x-aksen.

Vi kan selvfølgelig også gå den anden vej: Hvis vi kender de polære koordinater $P = [r, u]$, og skal bestemme de sædvanlige rektangulære koordinater (cartesiske koordinater). Fx, hvis

$P := [2, 60] = [2, 60]$

så bestemmes de cartesiske koordinater ved

$$pol2cart(P) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

1.7 Enhedsvektor

Hvis $\vec{a}$ er en egentlig vektor, er $|\vec{a}| \neq 0$, så det giver mening at se på vektoren $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$, der er en enhedsvektor ensrettet med $\vec{a}$. Er fx $\vec{a} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

så er

$$\frac{1}{len(\vec{a})} \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{2}{13}\sqrt{13} \\ \frac{3}{13}\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

I Gym-pakken er en funktion, der klarer dette. Denne hedder *ev*, og fungerer således (husk, Gym-pakken skal være indlæst):

$$ev(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{13}\sqrt{13} \\ \frac{3}{13}\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

1.8 Skalarprodukt

Skalarproduktet mellem to vektorer i Maple udregnes når du taster . (punktum) mellem de to vektorer:

$$\vec{a} := \langle 3, 4 \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle 5, 2 \rangle = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} . \vec{b} = 23$$

Du kan selvfølgelig også regne med symbolske koordinater - dog ikke helt uproblematisk

$$\vec{a} := \langle 2\,t, 5 \rangle = \begin{bmatrix} 2\,t \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle 5, 2 \rangle = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} . \vec{b} = 10 + 10\,\bar{t}$$

Problemet er, at Maple arbejder med de komplekse tal, hvor du skal arbejde med de reelle tal. I Gym-pakken finder du en funktion, der løser dette problem (husk, Gym-pakken skal være indlæst):

$dotP(\vec{a}, \vec{b}) = 10 + 10\,t$

- så brug punktum-notationen, hvis du arbejder med konkrete (tal) koordinater - *dotP*, hvis der er en eller flere symbolske koordinater.

Du kan naturligvis også vælge at bruge *dotP* i begge tilfælde, men det kræver, at Gym-pakken er indlæst (det gør punktum-notationen ikke).

eksempel - ortogonale vektorer

Bestem tallet t, således at vektorerne $\vec{a} = \langle 1, 2\,t + 1\rangle$ og $\vec{b} = \langle t, -10\rangle$ er ortogonale:

$with(Gym):$

$\vec{a} := \langle 1, 2\,t + 1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\,t + 1 \end{bmatrix}$

$\vec{b} := \langle t, -10\rangle = \begin{bmatrix} t \\ -10 \end{bmatrix}$

$solve(dotP(\vec{a}, \vec{b}) = 0, t)$

$$-\frac{10}{19} \tag{1.2}$$

Dvs., at for $t = -\frac{10}{19}$ er vektorerne ortogonale.

1.9 Vinkel mellem 2 vektorer

Det er ganske nemt at finde vinklen mellem to vektorer vha. formlen: $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Hvis fx $\vec{a} = \langle 1, 7\rangle$ og $\vec{b} = \langle -3, 4\rangle$, bestemmes vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ således:

$\vec{a} := \langle 1, 7\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\vec{b} := \langle -3, 4\rangle = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

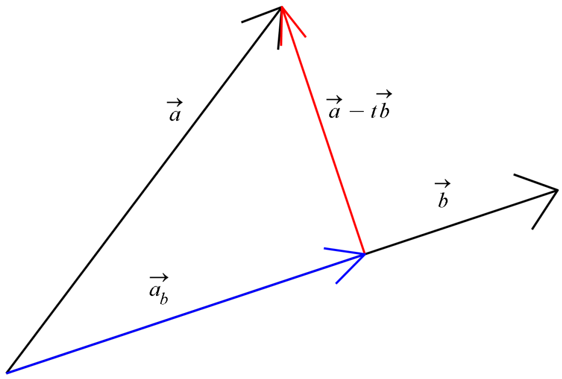
$Cos(v) = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{len(\vec{a}) \cdot len(\vec{b})} \right) \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 45.00000000]]$

I Gym-pakken finder du en funktion, der automatiserer beregningen:

$vinkel(\vec{a}, \vec{b}) = 45.$

1.10 Projektion af vektor på vektor

På figuren nedenfor er $\vec{a_b}$ (den vinkelrette) projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.



$\vec{a_b}$ kan beregnes vha. formlen

$$\vec{a_b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}$$

Lad os se, hvordan det fungerer i et eksempel:

Find projektionen af $\vec{a} = \langle 3, 2 \rangle$ på $\vec{b} = \langle 3, 4 \rangle$.

$$\vec{a} := \langle 3, 2 \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle 3, 4 \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p} := \frac{\vec{a} . \vec{b}}{len(\vec{b})} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{51}{5} \\ \frac{68}{5} \end{bmatrix}$$

Der er intet til hinder for, at betegne projektionsvektoren med $\vec{a_b}$, men så sak literal indeks benyttes. Bruger almindelig indeks, vil du få fejlmeddelelsen: 'Error, bad index into Vector'.

$$\vec{a_b} := \frac{\vec{a} . \vec{b}}{len(\vec{b})} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{51}{5} \\ \frac{68}{5} \end{bmatrix}$$

Men du skal ikke forsøge at sætte vektorpil over b.

Det kan være meget bekvemt at få automatiseret projektionen af en vektor på en vektor. Det klarer funktion *proj*, der findes i Gym-pakken:

$$proj(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{bmatrix} \frac{51}{25} \\ \frac{68}{25} \end{bmatrix}$$

- og projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ finder du således:

$$proj(\vec{b}, \vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{51}{13} \\ \frac{34}{13} \end{bmatrix}$$

1.11 Tværvektor

Tværvektorbegrebet findes ikke i Maple - det findes faktisk kun i det danske gymnasium. I Gym-pakken er tværvektor implementeret som funktionen *hat*, og virker sådan her (husk, Gym-pakken skal være indlæst):

$$\vec{a} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$hat(\vec{a}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

OBS:

Du skal **ikke** prøve på at skrive tværvektorer med **Accents**-paletten. Der er godt nok et symbol, der ligner, nemlig $\hat{a}$, men det er en vandret mængdeklamme, der er placeret over a. Det ses nemmere, hvis vektoren består af flere tegn. Fx $\widehat{AB}$

1.12 Determinant

Determinant er indbygget i Maple, men ikke helt gearet til vores brug. Defor 'redefineres' den i Gym-pakken.

Den hedder *det*, og virker helt som forventet (husk, at Gym-pakken skal være indlæst): $\vec{a} := \langle 4, -1 \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\vec{b} := \langle 3, -2 \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$det(\vec{a}, \vec{b}) = -5$$

Du kan naturligvis også bruge definitionen direkte:

$$hat(\vec{a}).\vec{b} = -5$$

Et lille eksempel i brug af determinanten:

Der er for ethvert t givet to vektorer ved $\vec{a} = \langle t-2, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 3t-1, 2+t \rangle$. Undersøg om der findes værdier af t for hvilke de to vektorer er parallelle.

$with(Gym)$:

$\vec{a} := \langle t-2, 2\rangle = \begin{bmatrix} t-2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\vec{b} := \langle 3\,t-1, 2+t\rangle = \begin{bmatrix} 3\,t-1 \\ 2+t \end{bmatrix}$

$det(\vec{a}, \vec{b}) = -6\,t + 2 + (t-2)\,(2+t)$

$solve\left(det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0, t\right)$

$$3+\sqrt{11}, 3-\sqrt{11} \tag{1.3}$$

Heraf ses, at de $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, når $t = 3+\sqrt{11}$ eller $t = 3-\sqrt{11}$.

1.13 Areal

I vektorpakken er implementeret to funktioner *arealP*, der beregner arealet af et parallelogram, og *arealT*, der beregner arealet af en trekant udspændt af to vektorer.Arealfunktionerne virker helt som forventet (husk, at Gym-pakken skal være indlæst):$\vec{a} := \langle 4, -1\rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\vec{b} := \langle 3, -2\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$arealP\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 5$

$arealT\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{5}{2}$

Et eksempel i brug af

Der er for ethvert t givet to vektorer ved $\vec{a} = \langle t-2, 2\rangle$ og $\vec{b} = \langle 3\,t-1, 2+t\rangle$. Undersøg om der findes værdier af t for hvilke trekanten, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, har arealet 2.

$with(Gym)$:

$\vec{a} := \langle t-2, 2\rangle = \begin{bmatrix} t-2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\vec{b} := \langle 3\,t-1, 2+t\rangle = \begin{bmatrix} 3\,t-1 \\ 2+t \end{bmatrix}$

$arealT\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\left(-6\,t+2+(t-2)\,(2+t)\right)^2}$

$solve\left(arealT\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 2, \{t\}\right)$

$$\{t = 3-\sqrt{7}\}, \{t = 3+\sqrt{7}\}, \{t = 3-\sqrt{15}\}, \{t = 3+\sqrt{15}\} \tag{1.4}$$

For ovenstående værdier af t, har trekanten, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, arealet 2.

2 Analytisk geometri i 2D

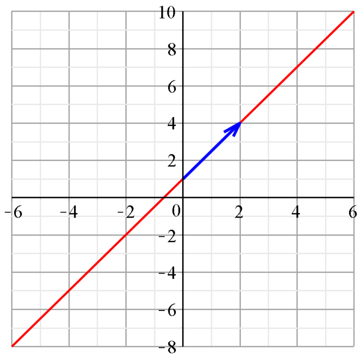
Når du skal regne opgaver med 2D-vektorer, skal du indlæse pakken *Gym*, som det sker i linjen nedenfor. Herefter vil alle funktionerne *arealP*, *arealT*, *cart*, ... være tilgængelige.

$with(Gym):$

2.1 Parameterfremstilling for en ret linje

I Maple er det mest bekvemt at beskrive en parameterfremstilling for en ret linje som en funktion $l : R \rightarrow R^2$, dvs. som en funktion, der til et reelt tal knytter et reelt talpar - altså en vektor.

En parameterfremstilling er fastlagt ud fra et ankerpunkt P_0 og en retningsvektor $\vec{r}$.



En parameterfremstilling for linjen ovenfor er $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

I Maple defineres denne parameterfremstilling ved:
$l := t \rightarrow \langle 0, 1 \rangle + t \cdot \langle 2, 3 \rangle$

$$t \rightarrow \langle 0, 1 \rangle + t \langle 2, 3 \rangle \qquad (2.1)$$

Beregn $l(t)$, og du får dette output:

$$l(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 + 3t \end{bmatrix}$$

Parameterværdier beregner du således, fx:

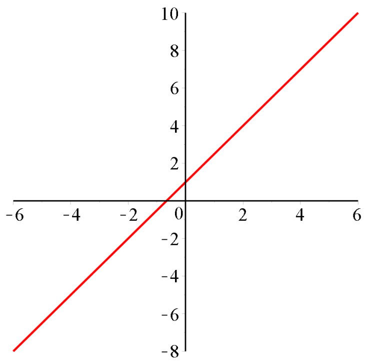
$$l(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Parameterfremstillinger tegnes med den almindelige *plot*-kommando, men syntaksen her er lidt speciel, idet de to koordinatfunktioner skal angives separat på formen

$$plot([x(t), y(t), t = \min..\max])$$

Desværre er det ikke muligt at fodre *plot* direkte med parameterfremstillingen, men det til at leve med:

$plot([l(t)_1, l(t)_2, t=-3..3])$



Husk, at dette indeks skal laves med Ctrl_.

2.2 Skæring mellem to linjer givet ved parameterfremstillinger

$l := t \rightarrow \langle 5,-2\rangle + t\cdot\langle 1, 2\rangle$

$$t \rightarrow \langle 5, -2\rangle + t\langle 1, 2\rangle \tag{2.2}$$

$m := t \rightarrow \langle 3, 1\rangle + t\cdot\langle -2, 4\rangle$

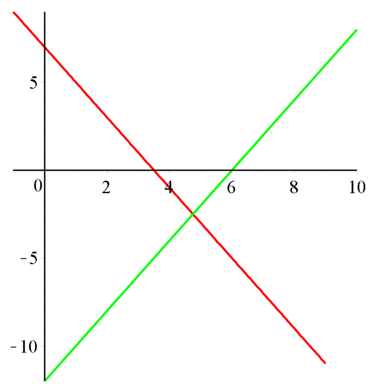
$$t \rightarrow \langle 3, 1\rangle + t\langle -2, 4\rangle \tag{2.3}$$

For god ordens skyld skal vi lige checke, om de to linjer skærer hinanden:

$det(\langle 1, 2\rangle, \langle -2, 4\rangle) = 8$

Da determinaten er forskellig fra 0, er de to retningsvektorer ikke parallelle, og de to linjer må derfor have et skæringspunkt.

$plot(\{[l(t)_1, l(t)_2, t=-5..5], [m(t)_1, m(t)_2, t=-3..2]\}, color=[red, green])$



Når skæringspunktet skal beregnes, skal du passe lidt på. Opfattes de to linjer som banekurven for to partiklers bevægelse, vil en løsning til ligningen $l(t) = m(t)$ være et punkt, hvor de to partikler befinder sig til **samme** tidspunkt, og det behøver der jo ikke at være selvom de to banekurver skærer hinanden.

I stedet skal du parametrisere med to forskellige tidsparametre s og t, og løse ligningen $l(t) = m(s)$

$$\begin{bmatrix} 5+t \\ -2+2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2s \\ 1+4s \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Der er et system bestående af to ligninger med to ubekendte

$$\begin{cases} 5+t=3-2s \\ -2+2t=1+4s \end{cases}$$

Dette kan løses direkte i Maple med

$solve(\{5+t=3-2s, -2+2t=1+4s\}, \{s,t\})$

$$\left\{s=-\frac{7}{8}, t=-\frac{1}{4}\right\} \tag{2.5}$$

Med *vsolve* fra Gym-pakken sparer du en del tastearbejde :

$vsolve(l(t)=m(s), \{s,t\})$

$$\left\{s=-\frac{7}{8}, t=-\frac{1}{4}\right\} \tag{2.6}$$

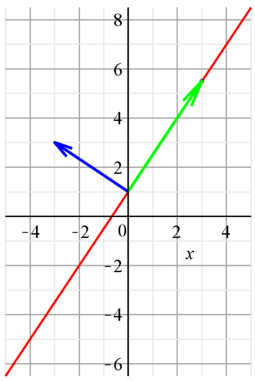
Skæringspunktet bestemmes da ved at indsætte $t=-\frac{1}{4}$ i $l(t)$ (eller $s=-\frac{7}{8}$ i $m(s)$):

$$l\left(-\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Skæringspunktet bliver dermed $\left(\frac{19}{4}, -\frac{5}{2}\right)$.

2.3 Linjens ligning

Ligningen for en ret linje er fastlagt ved et ankerpunkt P_0 og en normalvektor $\vec{n}$:



Hvis $P_0 = (x_0, y_0)$ og normalvektoren er $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, kan linjens ligning skrives på formen

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

I et konkret eksempel kan du blot indsætte værdier i denne ligning.

Lad os se på et eksempel:

En linje går gennem punktet $P_0(0, 1)$ og har normalvektoren $\vec{n} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Linjens ligning bliver da:

$-3 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 1) = 0$

$$-3x + 2y - 2 = 0 \tag{2.7}$$

Alternativ metode

Linjens ligning er et udtryk på formen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, hvilket kommer frem ved at indføre koordianter til P_0, P og $\vec{n}$, og omskrive ligningen $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

I Maple er det handy at benytte ligningen på en variant af formen $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$, nemlig

$$\vec{n}.\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}\right) = 0$$

eller, da $P = (x, y)$, på formen

$$\vec{n}.\left(\langle x, y\rangle - \langle P_0\rangle\right) = 0$$

Vi ser på eksemplet ovenfor:

En linje går gennem punktet $P_0(0, 1)$ og har normalvektoren $\vec{n} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Definer først P_0 som et punkt og derefter $\vec{n}$:

$P_0 := [0, 1] = [0, 1]$

$\vec{n} := \langle -3, 2\rangle = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Linjens ligning bliver da

$\vec{n}.\left(\langle x, y\rangle - \langle P_0\rangle\right) = 0$

$$-3x + 2y - 2 = 0 \tag{2.8}$$

OBS: Med disse 3 linjer har du en skabelon til at lave ligningen for en linje gennem et punkt P_0 og med normalvektor $\vec{n}$. Indekset på P_0 lavet med Ctrl__ .

Du kan nemt omskrive ligningen for l til den traditionelle form $y = a \cdot x + b$ således:

$-3x + 2y - 2 = 0 \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = \frac{3}{2}x + 1$

Du kan tegne grafen for en ret linje vha. *plot*, men kun hvis ligningen er på formen $y = a \cdot x + b$, idet *plot* kun tegner funktionsgrafer og parametriske plots.

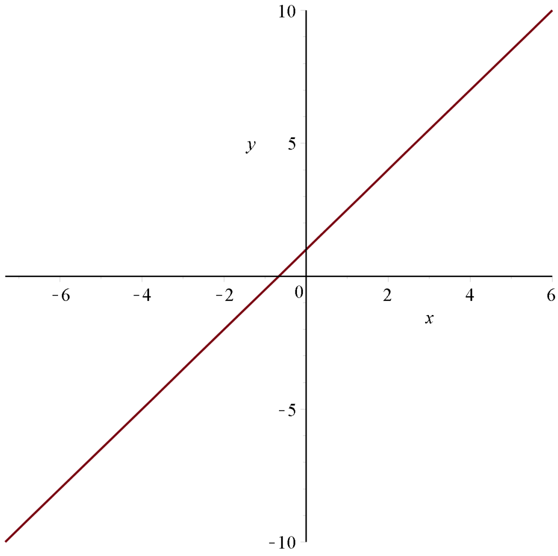
Hvis du vil tegne efter ligningen $ax + b \cdot y + c = 0$, kan du blot trække hele ligningen ind i et koordinatsystem:

Indsæt et koordinatsystem med **Insert > Plot > 2D**, og træk ligningen

$-3x + 2y - 2 = 0$

$$-3x + 2y - 2 = 0 \tag{2.9}$$

ind i koordinatsystemet:



2.4 Skæring mellem to linjer

Skal du finde skæringspunktet mellem to linjer (givet ved ligninger):

$l := 3x + 5y - 7 = 0$

$$3x + 5y - 7 = 0 \tag{2.10}$$

$m := 2x - 3y + 6 = 0$

$$2x - 3y + 6 = 0 \tag{2.11}$$

hvor linjerne er navngivet som l og m, hhv.

Først tjekker du, om de to normalvektorer er parallelle (ved at se, om linjernes normalvektorer er parallelle):

$det(\langle 3, 5\rangle, \langle 2, -3\rangle) = -19$

Da determinanten er forskellig fra 0, er de to normalvektorer ikke parallelle, og linjerne har et skæringspunkt. Dette bestemmes således:
$solve(\{l, m\}, \{x, y\})$

$$\left\{x = -\frac{9}{19}, y = \frac{32}{19}\right\} \tag{2.12}$$

2.5 Afstand fra punkt til linje

Her kan formlen selvfølgelig benyttes direkte - fx således:

Find afstanden fra punktet $P = (3, 5)$ til linjen med ligningen $-3x + 7y + 2 = 0$:
$l := -3x + 7y + 2 = 0$

$$-3x + 7y + 2 = 0 \tag{2.13}$$

$$dist := \frac{|subs(\{x = 3, y = 5\}, lhs(l))|}{len(\langle -3, 7\rangle)}$$

$$\frac{14}{29}\sqrt{58} \tag{2.14}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$3.6766$$

Igen har du her en skabelon, du altid kan bruge, når du skal finde afstanden fra et punkt til en linje. Du skal bare rette en smule til.

2.6 Cirklens ligning

Det er en simpel sag at opskrive ligningen for en cirkel med centrum $C(a, b)$ og radius r på formen:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{2.15}$$

Men hvordan kommer vi den anden vej? Altså, hvis vi har en cirkel givet ved ovenstående udtryk (sørg **altid** for at have 0 på højresiden):

$x^2+y^2+6x-14y+54=0$

$$x^2+y^2+6x-14y+54=0 \tag{2.16}$$

hvordan finder vi så centrum og radius?

Højreklik (Mac cmd+klik) på cirkelligningen, og vælg **completesquare > x** fra kontekstmenuen og dernæst **completesquare > y**.:

$x^2+y^2+6x-14y+54=0 \overset{\text{complete square}}{=} (y-7)^2+x^2+6x+5=0 \overset{\text{complete square}}{=} (y-7)^2+(x+3)^2-4=0$

Heraf følger, at $(-3, 7)$ og radius $r=\sqrt{2}$.

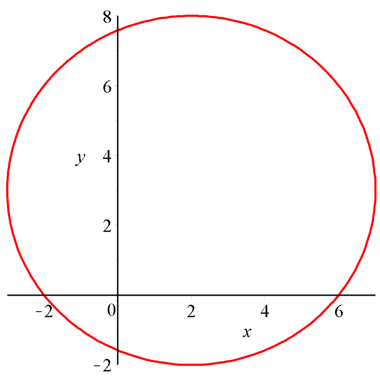
HUSK: Sørg altid for, at du har 0 på højresiden inden du bruger *completesquare*. Og vær opmærksom på, at rækkefølgen af kvadraterne ikke altid følger standarden.

2.7 Tegning af en cirkel

Du kan let tegne en cirkel ved at trække cirklens ligning til et koordinatsystem, du indsætter med **Insert > Plot > 2-D**:

$(x-2)^2+(y-3)^2=25$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25 \tag{2.17}$$



Hvis du trækker flere cirkelligninger eller ligningen for en linje til det samme koordinatsystem, vil du se, at tegningen reskaleres, så cirklerne bliver æggeformede. Dette kan du reparere ved at højreklikke (Mac: cmd+klik) i koordinatsystemet og vælge **Scaling constrained** fra kontekstmenuen.

implicitplot

Hvis du vil 'hard-code' din tegning skal du bruge *implicitplot* fra *plots*-pakken. Se detaljer om denne i online hjælpen (skriv fx ?*implicitplot* for at kalde specifik hjælp frem).

Kommandoen *implicitplot* plotter ligninger - i modsætning til *plot*, der plotter funktionsudtryk. Du kan plotte flere ligninger i samme kommando ved at pakke ligningerne sammen med [ ].

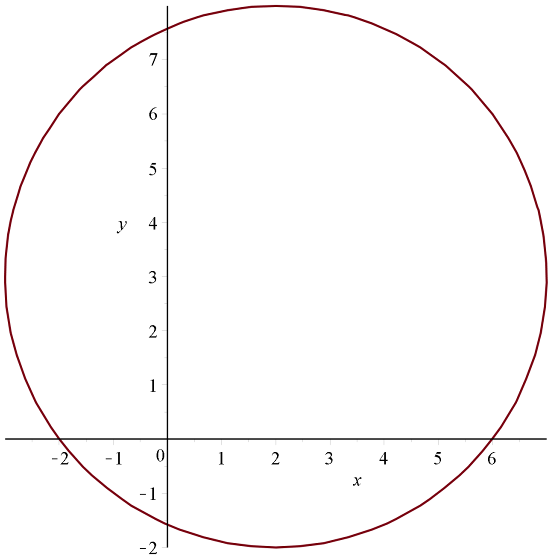
Vi vil tegne cirklen

$CL1 := (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \tag{2.18}$$

$with(plots):$

$implicitplot(CL1, x = -10..10, y = -10..10, scaling = CONSTRAINED, numpoints = 2000)$

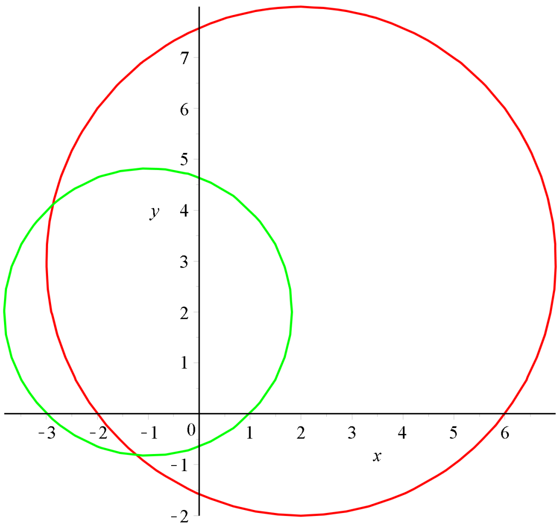


Lad os prøve i samme system at plotte (det er ligegyldigt, hvilken form cirklens ligning har):

$CL2 := x^2 + 2x + 5 + y^2 - 4y = 8$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 8 \tag{2.19}$$

$implicitplot([CL1, CL2], x = -10\,..10, y = -10\,..10, scaling = CONSTRAINED, numpoints = 2000,$
$color = [red, green])$



2.8 Skæring mellem linje og cirkel

Dette er meget simpelt, hvis linjen er givet ved en ligning:

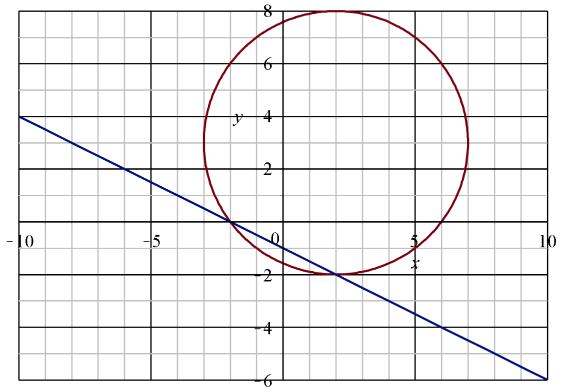
$CL := (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25 \tag{2.20}$$

$L := x + 2y + 2 = 0$

$$x + 2y + 2 = 0 \tag{2.21}$$

Træk de to ligninger til et koordinatsystem indsat med Insert > Plot > 2-D og vælg scaling constrained i kontekstmenuen:



For at finde skæringspunkterne løses:

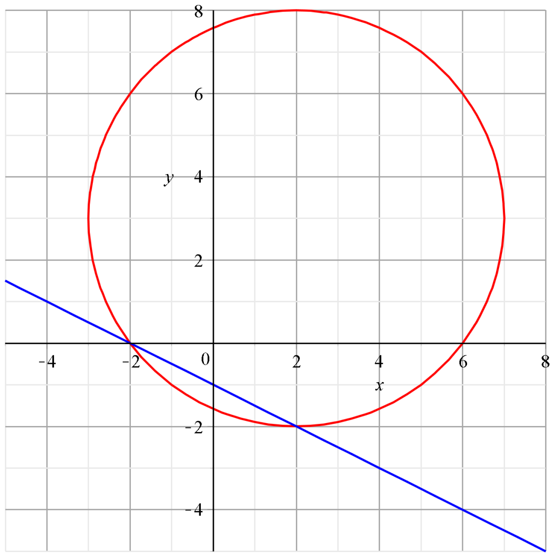
$solve(\{CL, L\}, \{x, y\})$

$$\{x = -2, y = 0\}, \{x = 2, y = -2\} \tag{2.22}$$

På tegningen ses, at det passer meget godt.

Kommandoen hard-codes således:

$implicitplot([CL, L], x = -5\,..10, y = -5\,..10, scaling = CONSTRAINED, numpoints = 2000, color = [red, blue], gridlines = true)$



Hvis den samme linje er givet ved en parameterfremstilling er det en smule mere kompliceret at finde skæringspunkterne:
$l := t \rightarrow \langle 6, -4 \rangle + t \cdot \langle 4, -2 \rangle$

$$t \rightarrow \langle 6, -4 \rangle + t \langle 4, -2 \rangle \tag{2.23}$$

Først indsættes linjens parameterfremstilling i cirklens ligning - dvs: $x = 6 + 4t$ og $y = -4 - 2t$ indsættes i cirklens ligning, og der løses med hensyn til t:
$subs(\{x = 6 + 4t, y = -4 - 2t\}, CL)$

$$(4 + 4t)^2 + (-7 - 2t)^2 = 25 \tag{2.24}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{t = -1\}, \{t = -2\}$$

Skæringspunkterne finder du ved at indsætte hhv. $t = -2$ og $t = -1$ i parameterfremstillingen.

$l(-1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$l(-2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Skæringspunkterne er altså $(2, -2)$ og $(-2, 0)$.

Alternativt: For at bevare forbindelsen til parameterfremstillingen l, kan indsætte linjens parameterfremstilling i cirklens ligning således

$subs\left(\{x = l(t)_1, y = l(t)_2\}, CL\right)$

$$(4 + 4t)^2 + (-7 - 2t)^2 = 25 \tag{2.25}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{t = -1\}, \{t = -2\} \tag{2.26}$$

Fordelen ved denne metode er, at hvis du laver ændringer i din parameterfremstilling, så behøver du blot at genberegne solve-kommandoerne, idet ændringer automatisk videreføres med referencerne $l(t)_1$ og $l(t)_2$.

3 Vektorer i 3D

3.1 Vektorregning i 3D

Arbejdet med vektorer i 3D i Maple foregår stort set som i 2D - blot har vektorerne her en komponent mere. Indtastningen foregår således:

$$\vec{a} := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

hvor de kantede parenteser laves vha < og > direkte fra tastaturet, og indeks på vektorens koordinater laves med Ctrl+_

Nogle af rutinerne fra Gym-pakken virker også i 3D: *dotP*, *len*, *proj*, *ev*, *arealP*, *arealT* og *vinkel*. Fx findes længden af $\vec{a}$ således

$with(Gym):$

$$len(\vec{a}) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

og skalarproduktet mellem to vektorer:

$$\vec{a} := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle : \vec{b} := \langle b_1, b_2, b_3 \rangle :$$

$$dotP(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Eksempel

En trekant har vinkelspidserne $A(1, 5, 7)$, $B(-3, 2, 3)$ og $C(4, 10, -2)$. Tegn trekanten, og bestem sidelængder og vinkler i trekanten.

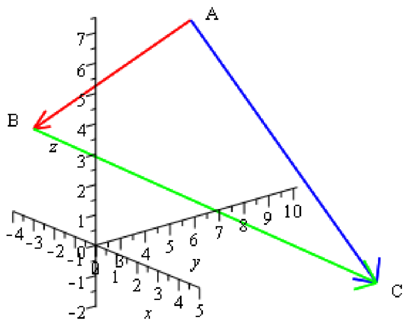
Som tidligere beskriver vi punkterne med lister:

$A := [1, 5, 7] : B := [-3, 2, 3] : C := [4, 10, -2] :$

$$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} := \langle C - B \rangle = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \langle C - A \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$



$$len\left(\overrightarrow{AB}\right) = \sqrt{41}$$

$$len\left(\overrightarrow{AC}\right) = \sqrt{115}$$

$$len\left(\overrightarrow{BC}\right) = \sqrt{138}$$

$\angle A$:

$$vinkel\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 82.46860070$$

$\angle B$:

$$vinkel\left(-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 64.82271163$$

$\angle C$

$$vinkel\left(-\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{BC}\right) = 32.70868776$$

Læg mærke til, at når en vinkel bestemmes, da 'udgår' vektorerne fra den pågældende vinkel.

3.2 Krydsproduktet

Krydsproduktet er implementeret i Maple vha. × fra **Common Symbols** paletten

$$\vec{a} := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle : \vec{b} := \langle b_1, b_2, b_3 \rangle :$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Lad os lige checke, at dette $\times$ -produkt opfylder, at $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ og $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

$dotP(\vec{a}, (\vec{a} \times \vec{b})) = a_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2 (-a_1 b_3 + a_3 b_1) + a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \overset{\text{simplify}}{=} 0$

$dotP(\vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b})) = b_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2 (-a_1 b_3 + a_3 b_1) + b_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \overset{\text{simplify}}{=} 0$

3.3 Teoretiske overvejelser vedr. krydsproduktet

Hvis krydsproduktet mellem to vektorer defineres som ovenfor, virker det let som en åbenbaring, så lad os se, hvordan vi let kan regne os frem til noget der ligner krydsproduktet.

Hvis vi har givet to (egentlige og ikke-parallelle) vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$:

$\vec{a} := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle : \vec{b} := \langle b_1, b_2, b_3 \rangle :$

og ønsker at finde en vektor

$\vec{x} := \langle x_1, x_2, x_3 \rangle :$

der er ortogonal til såvel $\vec{a}$ som $\vec{b}$, må skalarprodukterne være 0. Dvs

$dotP(\vec{a}, \vec{x}) = 0$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \tag{3.1}$$

$dotP(\vec{b}, \vec{x}) = 0$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \tag{3.2}$$

Vi får herved et ligningssystem bestående af to ligninger med tre ubekendte. Til dette system er der uendeligt mange løsninger, men hvis vi holder fx x_3 fast på en valgt (vilkårlig) værdi, så får vi et ligningssystem bestående af to ligninger med to ubekendte. Vi sætter derfor $x_3 = t$ ind i ligningssystemet:

$subs(x_3 = t, \textbf{(1.3.1)})$

$$t\, a_3 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \tag{3.3}$$

$subs(x_3 = t, \textbf{(1.3.2)})$

$$t\, b_3 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0 \tag{3.4}$$

og løser med hensyn til x_1 og x_2:

$solve(\{\textbf{(1.3.3)}, \textbf{(1.3.4)}\}, \{x_1, x_2\})$

$$\left\{x_1 = \frac{t\,(a_2 b_3 - a_3 b_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, x_2 = -\frac{t\,(a_1 b_3 - a_3 b_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\right\} \tag{3.5}$$

Da der er frit valg med hensyn til t, kan vi jo lige så godt vælge et t, der giver pæne koordinater

$subs(t = a_1 b_2 - a_2 b_1, \textbf{(1.3.5)})$

$$\{x_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, x_2 = -a_1 b_3 + a_3 b_1\} \tag{3.6}$$

3.4 Beviser med Maple

I Maple er det ganske simpelt at lave nogle af de beregningstunge koordinatudregninger:

1. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

2. $t \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = t \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times t \cdot \vec{b}$

3. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

4. $\vec{a} \times \vec{o} = \vec{a} \times \vec{o} = \vec{o}$

5. $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$\vec{a} := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle : \vec{b} := \langle b_1, b_2, b_3 \rangle : \vec{c} := \langle c_1, c_2, c_3 \rangle :$

Bevis for 1:

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$

$$\begin{bmatrix} a_2 (b_3 + c_3) - a_3 (b_2 + c_2) \\ a_3 (b_1 + c_1) - a_1 (b_3 + c_3) \\ a_1 (b_2 + c_2) - a_2 (b_1 + c_1) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$$\begin{bmatrix} a_2 b_3 + a_2 c_3 - a_3 b_2 - a_3 c_2 \\ -a_1 b_3 - a_1 c_3 + a_3 b_1 + a_3 c_1 \\ a_1 b_2 + a_1 c_2 - a_2 b_1 - a_2 c_1 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

(1.4.1)−(1.4.2) $\overset{\text{simplify}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bevis for 5.

$len(\vec{a} \times \vec{b})^2$

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (-a_1 b_3 + a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \tag{3.9}$$

$len(\vec{a})^2 \cdot len(\vec{b})^2 - dotP(\vec{a}, \vec{b})^2$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \tag{3.10}$$

(1.4.3)−(1.4.4) $\overset{\text{simplify}}{=} 0$

4 Analytisk geometri i 3D

4.1 Parameterfremstilling for en ret linje i rummet

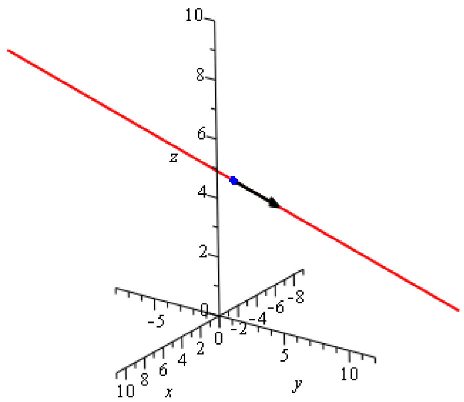
Beskrivelse, eksempel og plot

I Maple er det mest bekvemt at beskrive en parameterfremstilling for en ret linje som en funktion $l : R \to R^3$, dvs., som en funktion, der til et reelt tal knytter et reelt triple - altså en 3D-vektor.

En parameterfremstilling er fastlagt ud fra et ankerpunkt P_0 og en retningsvektor $\vec{r}$. Fx
$l := t \to \langle 1, 2, 5 \rangle + t \cdot \langle -2, 2, -1 \rangle$

$$t \to \langle 1, 2, 5 \rangle + t \langle -2, 2, -1 \rangle \tag{4.1}$$

hvor $\vec{r} = \langle -2, 2, -1 \rangle$ og $P_0 = [1, 2, 5]$.



Parameterværdier beregner du således, fx:

$$l(2) = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

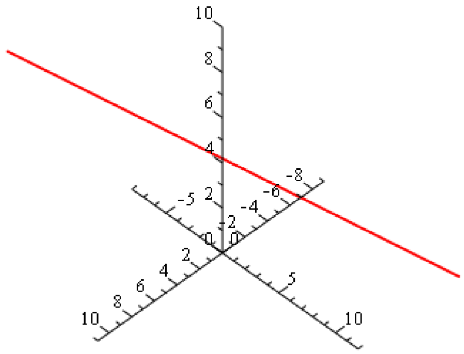
Parameterfremstillinger tegnes med *spacecurve*-kommandoen (der ligger i *plots*-pakken). Syntaksen er

$$\mathit{spacecurve}([x(t), y(t), z(t)], t = \min..\max, \mathit{options})$$

Desværre er det ikke muligt at fodre *spacecurve* direkte med parameterfremstillingen:

$with(plots)$:

$spacecurve\left(\left[l(t)_1, l(t)_2, l(t)_3\right], t=-5..5, axes=normal, color=red\right)$



Skæring mellem to linjer givet ved parameterfremstillinger

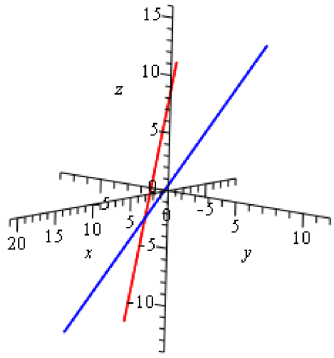
$l := t \to \langle 6, 2, 1 \rangle + t \cdot \langle 3, 2, 3 \rangle$

$$t \to \langle 6, 2, 1 \rangle + t \langle 3, 2, 3 \rangle \tag{4.2}$$

$m := t \to \langle 4, 2, 1 \rangle + t \cdot \langle 1, 2, 3 \rangle$

$$t \to \langle 4, 2, 1 \rangle + t \langle 1, 2, 3 \rangle \tag{4.3}$$

For god ordens skyld skal vi lige checke, om de to linjer er parallelle eller sammenfaldende. Det ses umiddelbart, at de to retningsvektorer $\langle 3, 2, 3\rangle$ og $\langle 1, 2, 3\rangle$ ikke er proportionale, og derfor ikke parallelle.



Når skæringspunktet skal beregnes, skal du passe lidt på. Opfattes de to linjer som banekurven for to partiklers bevægelse, vil en løsning til ligningen $l(t) = m(t)$ være et punkt, hvor de to partikler befinder sig til **samme** tidspunkt, og det behøver der jo ikke at være selvom de to banekurver skærer hinanden (men det sker her - se nedenfor)

I stedet skal du parametrisere med to forskellige tidsparametre s og t, og løse$with(Gym)$:

$vsolve(l(t) = m(s))$

$$\{s = -1, t = -1\} \tag{4.4}$$

Skæringspunktet bestemmes da ved at indsætte $t = -1$ i $l(t)$ (eller $s = -1$ i $m(s)$):

$$l(-1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

4.2 Planens ligning

Beskrivelse, eksempel og plot

Ligningen for en ret plan er fastlagt ved et ankerpunkt P_0 og en normalvektor $\vec{n}$.

Planens ligning skrives på formen

$$a\cdot(x - x_0) + b\cdot(y - y_0) + c\cdot(z - z_0) = 0$$

Lad os se på et eksempel:

En plan går gennem punktet $P_0 = (2, 4, -1)$ og har normalvektoren $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}$. Planens ligning bestemmes:

$\alpha := 3 \cdot (x-2) + (-7) \cdot (y-4) + (-1) \cdot (z-(-1)) = 0$

$$3x + 21 - 7y - z = 0 \quad (4.5)$$

Det gik jo ganske nemt.

Alternativ metode

Her tager vi udgangspunkt i, at planens ligning kan skrives på formen $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$. I eksemplet ovenfor er

$P_0 := [2, 4, -1]$:

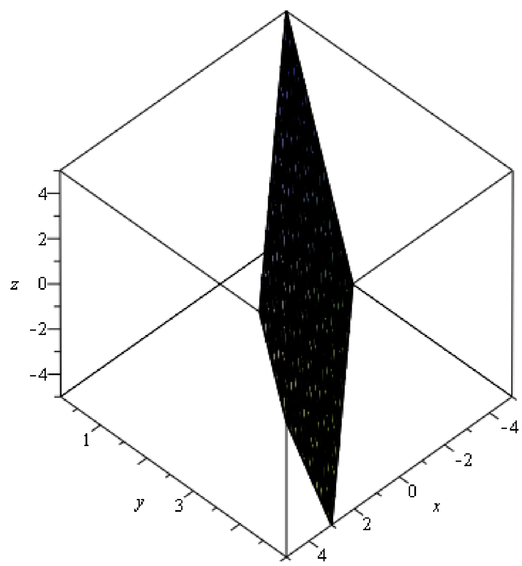
$\vec{n} := \langle 3, -7, -1 \rangle$:

Planens ligning er da

$\vec{n}.(\langle x-2, y-4, z+1 \rangle) = 0$

$$3x + 21 - 7y - z = 0 \quad (4.6)$$

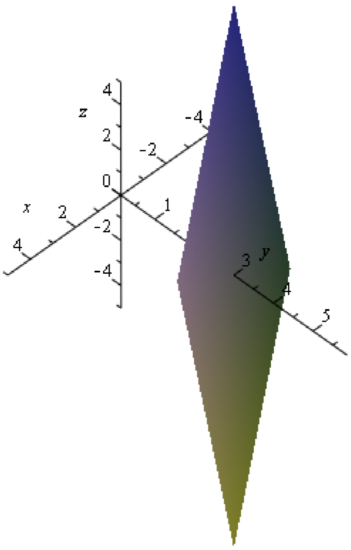
Hvis du vil tegne en plan med ligningen $ax + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$, kan du trække planens ligning til et 3D-koordinatsystem, du har indsat med **Insert > Plot >3D**. Det kommer til at se sådan ud:



Du kan også benytte kommandoen *implicitplot3d* fra *plots*-pakken. Der er en masse indstillinger til denne kommando - herunder, hvordan planen skal se ud, hvordan lyset skal falde og hvor gennemsigtig den skal være. Se detaljer her (fjern havelågen, og udfør linjen):

#?plot3d,options

$implicitplot3d(\alpha, x=-5..5, y=-5..8, z=-5..5, axes=normal, style=surface)$



En plans skæring med koordinatakserne

En plan er givet ved ligningen

$\alpha := x - 6y + 2z + 4 = 0$

$$x - 6y + 2z + 4 = 0 \tag{4.7}$$

Planens normalvektor er $\vec{n} = \langle 1, -6, 2\rangle$. Da denne ikke er parallel med en af koordinatakserne, vil planen skære alle akser. Skæringspunkterne bestemmes ved at sætte to af variablerne lig med 0, og bestemme den sidste:

$subs(\{x=0, y=0\}, \alpha)$

$$4 + 2z = 0 \tag{4.8}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{z = -2\} \tag{4.9}$$

Dvs., at α skærer z-aksen i punktet $[0, 0, -2]$. Tilsvarende findes skæring med x- og y-aksen.

Planens ligning ud fra 3 punkter i planen

Planen α indeholder punkterne

$A := [1, 1, 6] : B := [1, 3, 6] : C := [-2, 6, 0] :$

Vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ må da være vektorer i planen. Disse kan findes således:

$\overrightarrow{AB} := \langle B - A\rangle; \overrightarrow{AC} := \langle C - A\rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Da disse er ikke-parallelle, vil deres krydsprodukt være en normalvektor for planen α:

$\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

Benyttes fx A som planens ankerpunkt, fås ligningen

$\alpha := \vec{n}.\langle x - 1, y - 1, z - 6\rangle = 0$

$$-12\,x - 24 + 6\,z = 0 \tag{4.11}$$

Skæring mellem to planer (givet ved ligninger)

Skal du finde skæringspunktet mellem to planer (givet ved ligninger):

$\alpha := 2\,x + 4\,y + 2\,z + 8 = 0$

$$2\,x + 4\,y + 2\,z + 8 = 0 \tag{4.12}$$

$\beta := 3\,x + y + 2\,z - 6 = 0$

$$3\,x + y + 2\,z - 6 = 0 \tag{4.13}$$

checker du først, om de to normalvektorer er parallelle - hvilket de umiddelbart set ikke at være.

Det nemmeste er nok at løse direkte (2 ligninger med 3 ubekendte)

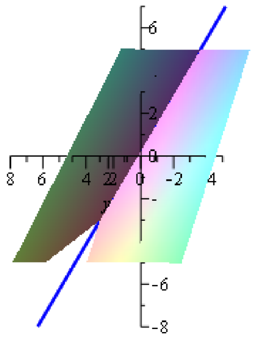
$solve(\{\alpha, \beta\}, \{x, y, z\})$

$$\{x = 14 + 3\,y, y = y, z = -18 - 5\,y\} \tag{4.14}$$

Sætter vi $y = t$, kan denne løsning udtrykkes således

$m := t \rightarrow \langle 14, 0, -18 \rangle + t \cdot \langle 3, 1, -5 \rangle$

$$t \rightarrow \langle 14, 0, -18 \rangle + t \langle 3, 1, -5 \rangle \tag{4.15}$$



Alternativ metode

Alternativt kan skæringslinjen udregnes ved at bestemme linjens retningsvektor som krydsprodukt af planernes normalvektorer, og udregne et punkt på linjen:

$\vec{n}_\alpha := \langle 2, 4, 2 \rangle : \vec{n}_\beta := \langle 3, 1, 2 \rangle : :$

$\vec{r} := \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -10 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Dette er dog ikke den samme retningsvektor, som ovenfor, men de er dog proportionale med proportionalitetsfaktoren 2.

Vi mangler blot et punkt på linjen. Dette kan bestemmes ved (om muligt) at sætte $y = 0$ i de to ligninger, og løse mht. x og y:

$subs(y = 0, \alpha)$

$$2x + 8 + 2z = 0 \tag{4.17}$$

$subs(y = 0, \beta)$

$$3x - 6 + 2z = 0 \tag{4.18}$$

$solve(\{\mathbf{(1.2.4.1.2)}, \mathbf{(1.2.4.1.3)}\}, \{x, z\})$

$$\{x = 14, z = -18\} \tag{4.19}$$

Dvs., at punktet bliver $[14, 0, -18]$. Altså det samme som ovenfor.

Vinkel mellem to planer

Vinklen mellem de to planer kan nemt findes som vinklen mellem de to normalvektorer

$with(Gym)$:

$vinkel\left(\vec{n}_{\alpha}, \vec{n}_{\beta}\right) = 40.20296587$

Skæring mellem plan (givet ved en ligning) og linje

En plan er givet ved ligningen
$\alpha := 2x + 3y - z - 7 = 0$

$$2x + 3y - z - 7 = 0 \tag{4.20}$$

og en linje er givet ved parameterfremstillingen
$l := t \rightarrow \langle 2, 4, -3 \rangle + t \cdot \langle 1, -2, 2 \rangle$

$$t \rightarrow \langle 2, 4, -3 \rangle + t \langle 1, -2, 2 \rangle \tag{4.21}$$

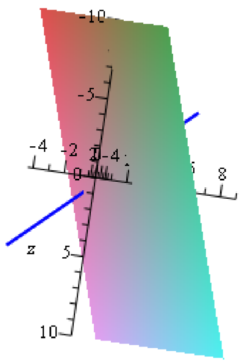
Skæringen mellem planen og linjen findes ved at sætte parameterfremstillingen ind i planens ligning, og løse mht. t.
Denne løsning indsættes i linjens parameterfremstilling, og punktet findes:
$subs\left(\{x = l(t)_1, y = l(t)_2, z = l(t)_3\}, \alpha\right)$

$$12 - 6t = 0 \tag{4.22}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{t = 2\}$$

$l(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



Vinkel mellem linje og plan

Vinklen mellem linjen og planen kan findes som komplementvinklen til vinklen mellem planens normalvektor og linjens retningsvektor:

$\vec{n} := \langle 2, 3, -1 \rangle : \vec{r} := \langle 1, -2, 2 \rangle :$

$|90 - \mathit{vinkel}(\vec{n}, \vec{r})| = 32.3115333$

Afstand fra plan til punkt

Afstanden fra en plan med ligningen $\alpha := a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ til et punkt $P(x_1, y_1, z_1)$ findes ved at indsætte P's koordinater i venstresiden af planens ligning (dette tal giver kun 0, hvis P ligger i planen), og dividere dette tal med længden af planens normalvektor. Formlen er denne

$$\mathit{dist} = \frac{|a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Et konkret eksempel:

$\alpha := 2x - y - 2z + 3 = 0$

$$2x - y - 2z + 3 = 0 \tag{4.23}$$

$P := [3, 5, -7] :$

Planens normalvektor aflæses til

$\vec{n} := \langle 2, -1, -2 \rangle :$

Afstanden bliver da (husk *len* ligger i Gym-pakken):

$\frac{|\mathit{subs}(\{x = 3, y = 5, z = -7\}, \mathit{lhs}(\alpha))|}{\mathit{len}(\vec{n})} = 6$

Projektion af punkt på plan

Lad planen være givet ved ligningen

$\alpha := 2x - y - 2z + 3 = 0$

$$2x - y - 2z + 3 = 0 \tag{4.24}$$

og et punkt ved

$P := [3, 5, -7] :$

Vi skal bestemme projektionen af P på α: Ideen er at lave en linje l gennem P og vinkelret på α. Skæringspunktet mellem l og α må da være projektionspunktet.

Planens normalvektor aflæses til

$\vec{n} := \langle 2, -1, -2 \rangle :$

Linjen l får da parameterfremstillingen:

$l := t \rightarrow \langle 3, 5, -7 \rangle + t \cdot \vec{n}$

$$t \rightarrow \langle 3, 5, -7 \rangle + t\vec{n} \tag{4.25}$$

Skæringspunktet mellem l og α bestemmes
$\mathit{subs}(\{x = l(t)_1, y = l(t)_2, z = l(t)_3\}, \alpha)$

$$18 + 9t = 0 \tag{4.26}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{t = -2\}$$

Dvs., at projektionspunktet bliver

$$l(-2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

4.3 Planens parameterfremstilling

Beskrivelse, eksempel og plot

restart

Som ved linjens parameterfremstilling er de også her mest bekvemt af beskrive parameterfremstillingen for en plan ved en funktion, men denne gang en funktion $R^2 \to R^3$, altså en funktion, der til ethvert talpar tilordner en 3D-vektor.

Fx beskrives denne parameterfremstilling:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ved funktionen

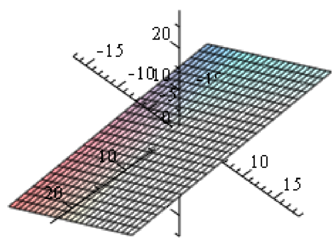
$pl := (s, t) \to \langle 3, 1, 2 \rangle + s \cdot \langle 2, 5, 6 \rangle + t \cdot \langle -5, 1, 3 \rangle$

$$(s, t) \to \langle 3, 1, 2 \rangle + s \langle 2, 5, 6 \rangle + t \langle -5, 1, 3 \rangle \tag{4.27}$$

Planen tegnes med *plot3d* kommandoen fra *plots*-pakken ved at indsætte de tre koordinatfunktioner i en liste, og angive intervallet for de to parametre s og t:

$with(plots)$:

$plot3d\left(\left[pl(s,t)_1, pl(s,t)_2, pl(s,t)_3\right], s = -3..3, t = -3..3, axes = normal\right)$



Planens parameterfremstilling ud fra 3 punkter i planen

Planen α indeholder punkterne

$A := [1, 1, 6] : B := [1, 3, 6] : C := [-2, 6, 0] :$

Vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ må da være vektorer i planen. Disse kan findes således:

$$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \langle C - A \rangle = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Da disse er ikke-parallelle, udspænder de planen α:

$\alpha := (s, t) \rightarrow \langle \mathrm{A} \rangle + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$

$$(s, t) \rightarrow \langle A \rangle + s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC} \tag{4.28}$$

$\alpha(\mathrm{s}, \mathrm{t})$

$$\begin{bmatrix} 1 - 3t \\ 1 + 2s + 5t \\ 6 - 6t \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Skæring mellem 2 planer givet ved parameterfremstillinger

To planer er givet ved parameterfremstillingerne

$l := (s, t) \rightarrow \langle 0, -2, 0 \rangle + s \cdot \langle -4, 0, 4 \rangle + t \cdot \langle 0, -2, 4 \rangle$

$$(s, t) \rightarrow \langle 0,\ -2,\ 0 \rangle + s \langle -4, 0, 4 \rangle + t \langle 0,\ -2, 4 \rangle \tag{4.30}$$

$m := (s, t) \rightarrow \langle 0, 0, 3 \rangle + s \cdot \langle -2, 6, 0 \rangle + t \cdot \langle -2, 0, 3 \rangle$

$$(s, t) \rightarrow \langle 0, 0, 3 \rangle + s \langle -2, 6, 0 \rangle + t \langle -2, 0, 3 \rangle \tag{4.31}$$

Skæringen mellem de to planer findes stort set på samme måde som skæringen mellem to linjer givet ved parameterfremstillinger, hvor der indføres forskellige navne for parametrene - og de to parameterfremstillinger sættes lig med hinanden:
$l(s, t) = m(u, v)$

$$\begin{bmatrix} -4s \\ -2 - 2t \\ 4s + 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u - 2v \\ 6u \\ 3 + 3v \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

Herved fremkommer tre ligninger med fire ubekendte. Et sådan system af ligninger har uendelig mange løsninger, så hvis vi løser med hensyn til de tre af variablerne (fx s, t og v), så får vi løsningerne udtrykt i termer af den fjerde variabel v.

$with(Gym)$:

$vsolve(l(s, t) = m(u, v), \{s, t, u\})$

$$\left\{s = -\frac{7}{20} + \frac{9}{20}\,v, t = \frac{11}{10} + \frac{3}{10}\,v, u = -\frac{7}{10} - \frac{1}{10}\,v\right\} \tag{4.33}$$

Indsættes værdierne for s og t i parameterfremstillingen l - eller værdien for u parameterfremstillingen m får vi parameterfremstillingen for skæringslinjen:

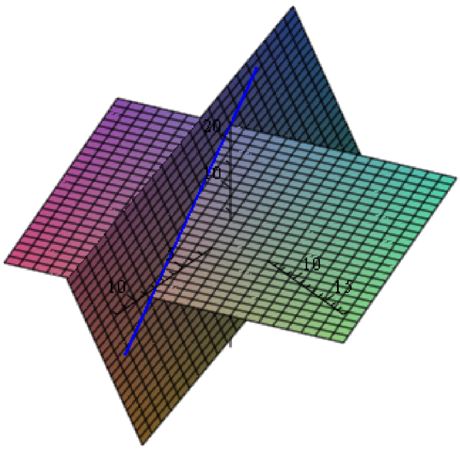
$line := v \to l\left(-\frac{7}{20} + \frac{9}{20}v, \frac{11}{10} + \frac{3}{10}v\right)$

$$v \to l\left(-\frac{7}{20} + \frac{9}{20}v, \frac{11}{10} + \frac{3}{10}v\right) \tag{4.34}$$

$line(t)$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{5} - \frac{9}{5}t \\ -\frac{21}{5} - \frac{3}{5}t \\ 3 + 3t \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

$with(plots):$
$pl1 := plot3d\left(\left[l(s,t)_1, l(s,t)_2, l(s,t)_3\right], s=-3..3, t=-3..3, axes=normal\right):$
$pl2 := plot3d\left(\left[m(s,t)_1, m(s,t)_2, m(s,t)_3\right], s=-3..3, t=-3..3, axes=normal\right):$
$cs := spacecurve\left(\left[line(v)_1, line(v)_2, line(v)_3\right], v=-5..5, color=blue, thickness=2\right):$
$display([pl1, pl2, cs])$



Hvis du synes, at dette er for langhåret, så kan du jo altid omforme parameterfremstillingerne for α og β til ligninger, og benytte metoden beskrevet under planens ligning.

4.4 Kuglens ligning

Beskrivelse, eksempel og plot

Ligningen for en kugle med centrum i $C(a, b, c)$ og med radius r er givet ved ligningen

$K := (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2:$

Ofte vil du få denne på ekspanderet form:

expand(K)

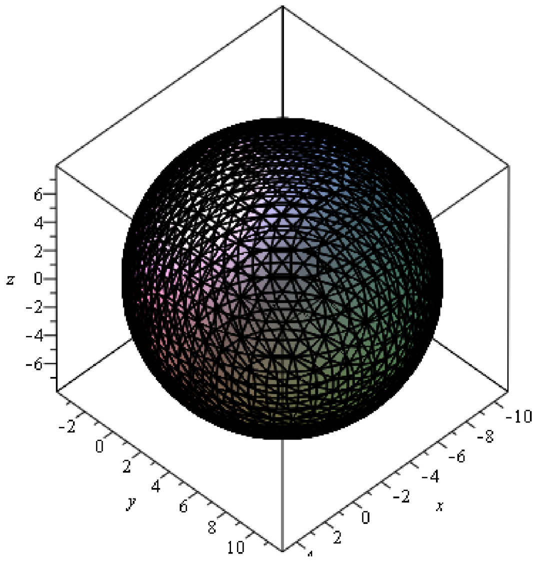
$$a^2 - 2\,a\,x + b^2 - 2\,b\,y + c^2 - 2\,c\,z + x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad (4.36)$$

- og så er din opgave at genskabe standardformen, hvor centrum og radius umiddelbart fremgår. Højreklik-kommandoen *complete square* klarer let denne opgave. Sørg i den forbindelse for, at du har 0 på højresiden$x^2 + y^2 + z^2 + 6\,x - 8\,y - 39 = 0 \overset{\text{complete square}}{=} (x+3)^2 + y^2 + z^2 - 8\,y - 48 = 0 \overset{\text{complete square}}{=} (y-4)^2 + (x+3)^2$

Heraf ses, at $C(-3, 4, 0)$ og $r = 8$.

En kugle tegnes ganske let med *implicitplot3d*:

$implicitplot3d\big(x^2 + y^2 + z^2 + 6\,x - 8\,y - 39 = 0, x = -12\,..5, y = -5\,..12, z = -10\,..10, scaling$
$= CONSTRAINED, numpoints = 10000, axes = boxed\big)$



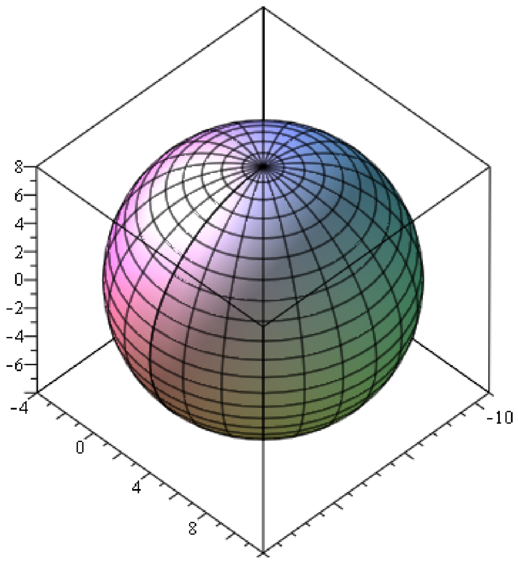
En mere fiks og færdig kommando til at tegne kugler med finder du i *plottools* pakken. Denne kræver dog, at du kender centrum og radius:

with$(plottools)$:

with$(plots)$:

$kugle := sphere([-3, 4, 0], 8)$: *#husk kolon (:) her - ellers vælter hele plotstrukturen ud*

$display(kugle, scaling = constrained, axes = boxed)$



Skæring mellem kugle og linje

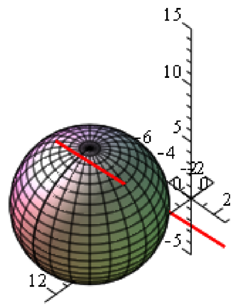
$K := (x-7)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$

$$(x-7)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25 \tag{4.37}$$

$l := t \rightarrow \langle -5, 1, -9 \rangle + t \cdot \langle 3, 0, 4 \rangle$

$$t \rightarrow \langle -5, 1, -9 \rangle + t \langle 3, 0, 4 \rangle \tag{4.38}$$

$kugle := sphere([7,-2,3], 5) :$
$pl := spacecurve\left(\left[l(t)_1, l(t)_2, l(t)_3\right], t = 1..6, thickness = 2, color = red\right) :$
$display([kugle, pl], scaling = constrained, axes = boxed, axes = normal)$



Skæringspunkterne bestemmes således

$subs\left(\left\{x = l(t)_1, y = l(t)_2, z = l(t)_3\right\}, K\right)$

$$(-12 + 3t)^2 + 9 + (-12 + 4t)^2 = 25 \tag{4.39}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{t = 4\}, \left\{t = \frac{68}{25}\right\} \tag{4.40}$$

$l(4) = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

$l\left(\frac{68}{25}\right) = \begin{bmatrix} \frac{79}{25} \\ 1 \\ \frac{47}{25} \end{bmatrix}$

Altså er skæringspunkterne $(7, 1, 7)$ og $\left(\frac{79}{25}, 1, \frac{47}{25}\right)$.

Skæring mellem kugle og plan

Ved skæring mellem en kugle og en plan fremkommer en cirkel eller et punkt. I det sidste tilfælde siges planen at tangere kuglen. Lad os se på et eksempel:

$K := (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 25$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 25 \tag{4.41}$$

$\alpha := 4x - y - 8z + 15 = 0$

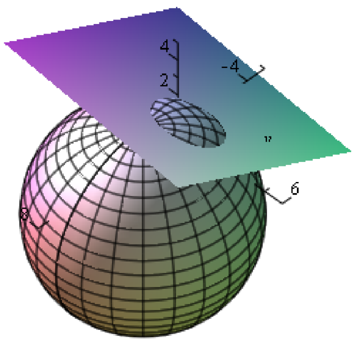
$$4x - y - 8z + 15 = 0 \tag{4.42}$$

Vi kan nemt checke, om planen skærer kuglen. I så fald skal afstanden fra kuglens centrum til planen være mindre end kuglens radius:

$$d := \frac{|subs(\{x=3, y=1, z=-2\}, lhs(\alpha))|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2}} = \frac{14}{3}$$

$kugle := sphere([3, 1, -2], 5)$:
$p\alpha := implicitplot3d(\alpha, x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5, style=surface)$:
$display([kugle, p\alpha], scaling=constrained, axes=boxed, axes=normal)$

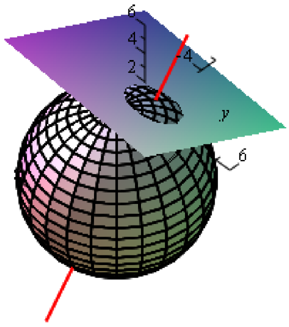
.



Skæringscirklens centrum kan findes ved at projicere kuglens centrum på planen α. Projektionspunktet i planen findes som skæringspunktet mellem planen α og linjen l gennem cirklens centrum og vinkelret på planen. Denne linje må da have planens normalvektor som retningsvektor.

$l := t \rightarrow \langle 3, 1, -2 \rangle + t \cdot \langle 4, -1, -8 \rangle$

$$t \rightarrow \langle 3, 1, -2 \rangle + t \langle 4, -1, -8 \rangle \tag{4.43}$$



Vi bestemmer skæringspunktet S mellem α og linjen l (altså centrum i skæringscirklen):
$subs\left(\left\{x = l(t)_1, y = l(t)_2, z = l(t)_3\right\}, \alpha\right)$

$$42 + 81\,t = 0 \tag{4.44}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

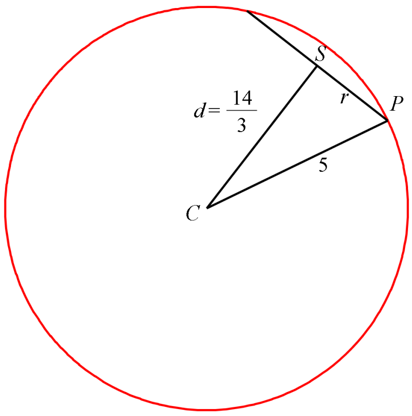
$$\left\{t = -\frac{14}{27}\right\}$$

$\overrightarrow{OS} := l\left(-\frac{14}{27}\right)$

$$\begin{bmatrix} \frac{25}{27} \\ \frac{41}{27} \\ \frac{58}{27} \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

Lad P være et punkt på skæringscirklen og C er kuglens centrum. Da er $|\overrightarrow{CP}| = 5$, da P jo også ligger på kuglen K. Vi kan så bestemme den sidste side i den retvinklede trekant CSP, med #S som den rette.

Figuren viser et snit i gennem centrum i kuglen og centrum i skæringscirklen



Pythagoras giver, at
$d^2 + r^2 = 5^2$

$$\frac{196}{9} + r^2 = 25 \tag{4.46}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\left\{r = \frac{1}{3}\sqrt{29}\right\}, \left\{r = -\frac{1}{3}\sqrt{29}\right\}$$

Så skæringscirklens radius er $r = \frac{1}{3}\sqrt{29}$.

Bestemmelse af skæringscirklen (Avanceret!)

Lad os løse ligningerne α og K som et system af 2 ligninger med 3 ubekendte, og se, om vi kan parametrisere løsningen:
$solve(\{\alpha, K\}, \{x, y, z\})$

$$\{x = RootOf(17\_Z^2 + (-64z + 106)\_Z + 65z^2 - 220z + 184), y = 4\,RootOf(17\_Z^2 + (-64z + 106)\_Z + 65z^2 - 220z + 184) - 8z + 15, z = z\} \tag{4.47}$$

$\xrightarrow{\text{all values}}$

$$\left\{x = \frac{32}{17}z - \frac{53}{17} + \frac{1}{17}\sqrt{-81z^2 + 348z - 319}, y = -\frac{8}{17}z + \frac{43}{17} + \frac{4}{17}\sqrt{-81z^2 + 348z - 319}, z = z\right\}, \left\{x = \frac{32}{17}z - \frac{53}{17} - \frac{1}{17}\sqrt{-81z^2 + 348z - 319}, y = -\frac{8}{17}z + \frac{43}{17} - \frac{4}{17}\sqrt{-81z^2 + 348z - 319}, z = z\right\}$$

Her kan vi plukke to parameterkurver ud (der er brugt copy&paste):

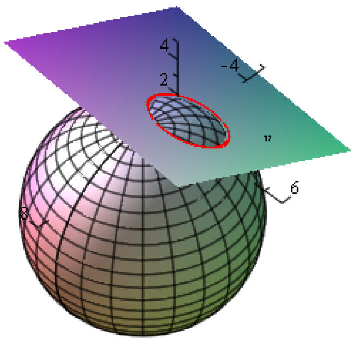
$$c1 := z \to \left\langle -\frac{53}{17} + \frac{32}{17} z + \frac{1}{17}\sqrt{-319 + 348 z - 81 z^2}, \frac{43}{17} - \frac{8}{17} z + \frac{4}{17}\sqrt{-319 + 348 z - 81 z^2}, z \right\rangle$$

$$z \to \left\langle -\frac{53}{17} + \frac{32}{17} z + \frac{1}{17}\sqrt{-319 + 348 z - 81 z^2}, \frac{43}{17} - \frac{8}{17} z + \frac{4}{17}\sqrt{-319 + 348 z - 81 z^2}, z \right\rangle \tag{4.48}$$

$$c2 := z \to \left\langle -\frac{53}{17} + \frac{32}{17} z - \frac{1}{17}\sqrt{-319 + 348 z - 81 z^2}, \frac{43}{17} - \frac{8}{17} z - \frac{4}{17}\sqrt{-319 + 348 z - 81 z^2}, z \right\rangle$$

$$z \to \left\langle -\frac{53}{17} + \frac{32}{17} z - \frac{1}{17}\sqrt{-319 + 348 z - 81 z^2}, \frac{43}{17} - \frac{8}{17} z - \frac{4}{17}\sqrt{-319 + 348 z - 81 z^2}, z \right\rangle \tag{4.49}$$

$kugle := sphere([3, 1, -2], 5)$:
$p\alpha := implicitplot3d(\alpha, x = -5..5, y = -5..5, z = -5..5, style = surface)$:
$pc1 := spacecurve([c1(z)_1, c1(z)_2, c1(z)_3], z = 0..10, color = red, thickness = 2, numpoints = 5000)$:
$pc2 := spacecurve([c2(z)_1, c2(z)_2, c2(z)_3], z = 0..10, color = red, thickness = 2, numpoints = 5000)$:
$display([kugle, p\alpha, pc1, pc2], scaling = constrained, axes = boxed, axes = normal)$

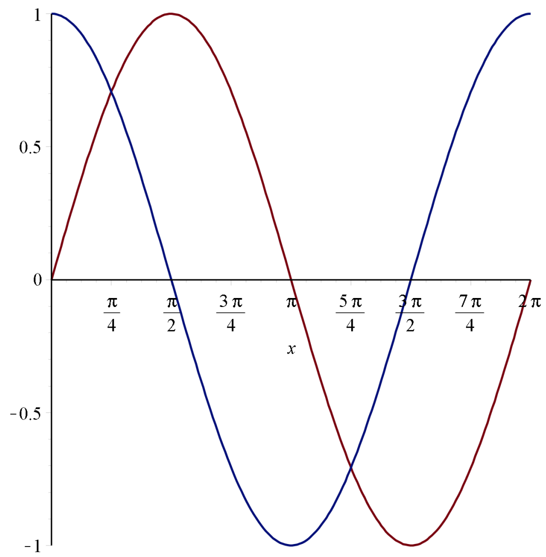


5 De trigonometriske funktioner

5.1 Grafer for sin, cos og tan

De trigonometriske funktioner er implementeret i Maple under navnene sin, cos, og tan. Bemærk, at funktionsnavnene her skal skrives med små begyndelsesbogstaver (i modsætning til når du laver trekantsberegning Gym-pakken).

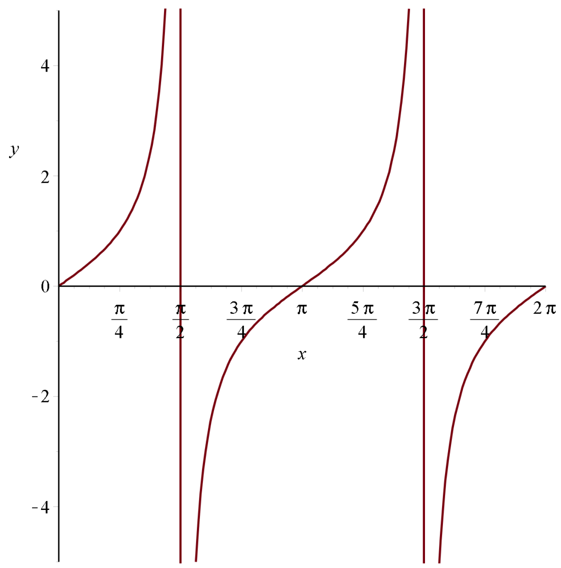
Graferne for sinus og cosinus i periodeintervallet $[0, 2\pi]$ ser sådan ud
$plot([\sin(x), \cos(x)], x = 0..2\pi)$



Læg specielt mærke til, at langs x-aksen er der angivet aksemærker i multipla af π. Denne indstilling får du helt automatisk.

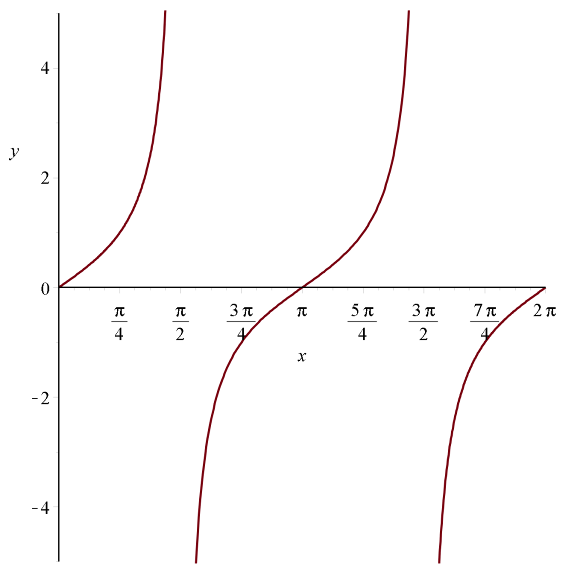
Tegner du grafen for tangens i intervallet $[0, 2\pi]$ og begrænser y-intervallet, får du en graf som denne

$plot(\tan(x), x = 0..2\pi, y = -5..5)$



De lodrette streger kommer som følge af, at tan ikke er defineret i $\frac{\pi}{2}$ og i $\frac{3\pi}{2}$, men disse streger er ikke en del af grafen og skal naturligvis ikke være der. Du kan tvinge Maple til at checke for diskontinuiterer ved at tilføje *discont* = *true* i plotkommandoen:

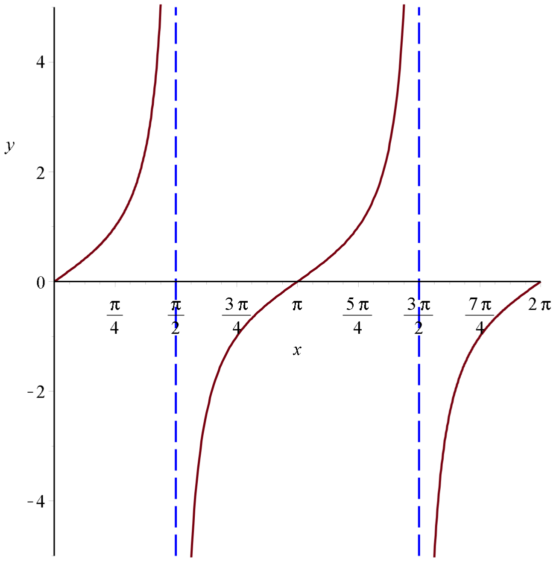
$plot(\tan(x), x = 0..2\pi, y = -5..5, discont = true)$



Hvis du vil have tegnet asymptoterne i i $\frac{\pi}{2}$ og i $\frac{3\pi}{2}$ er kommandoerne:

$with(plots)$:

$p1 := implicitplot\left(\left\{x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}\right\}, x = 0..2\pi, y = -5..5, linestyle = dash, color = blue\right)$:
$p2 := plot(\tan(x), x = 0..2\pi, y = -5..5, discont = true)$:
$display([p1, p2])$



5.2 Trigonometriske ligninger

Hvis du insisterer på at løse trigonometriske ligninger eksakt, vil du let komme i problemer, da der ofte vil findes uendelig mange løsninger til ligningen. Ofte vil en grafisk løsning i kombination med en numerisk solver være at foretrække. Lad os se på et par eksempler:

Eksempel 1

Løs ligningen $\sin(x) = \frac{1}{2}$ for $x \in [0, 2\pi]$

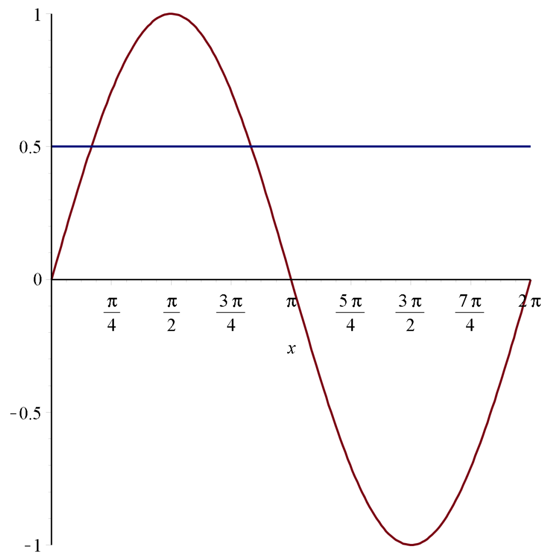
Ved brug af *solve* (symbolsk løsning), returnerer Maple blot en enkelt løsning:

$solve\left(\sin(x) = \frac{1}{2}, x\right)$

$$\frac{1}{6}\pi \tag{5.1}$$

For at illustrere problemet grafisk tegner vi graferne for $\sin(x)$ og $\frac{1}{2}$ i samme koordinatsystem

$$plot\left(\left[\sin(x), \frac{1}{2}\right], x = 0..2\pi\right)$$



Her ses tydeligt, at der er to løsninger: Den ene i nærheden af 0.5 og den anden i nærheden af 2.5. Du kan finde de numeriske løsninger ganske præcist ved at benytte *fsolve* sammen med de aflæste (cirka) værdier som startværdier:

$$fsolve\left(\sin(x) = \frac{1}{2}, x = 0.5\right)$$

$$0.5235987756 \tag{5.2}$$

$$fsolve\left(\sin(x) = \frac{1}{2}, x = 2.5\right)$$

$$2.617993878 \tag{5.3}$$

Eksempel 1 - symbolsk løsning (Avanceret)

Naturligvis kan Maple også give dig de symbolske løsninger:

Hvis du vil have samtlige løsninger returneret, skal du tilføje *AllSolutions* som parameter :

$$L := solve\left(\sin(x) = \frac{1}{2}, x, AllSolutions\right)$$

$$\frac{2}{3}\pi\_B1\sim + \frac{1}{6}\pi + 2\pi\_Z1\sim \tag{5.4}$$

Resultatet skal forstås på den måde, at *_Z1~* er et vilkårligt helt tal, og variablen *_B~* kan kun antage værdierne 0 og 1. Tegnet ~ (tilde) efter *_Z1* betyder, at Maple har gjort antagelser om *_Z1* og *_B1* (hvis du genberegner skifter navnene til *_Z2* og *_B2*).

Den første løsning i intervallet $[0, 2\pi]$ finder du ved at sætte $\_B1\sim = 0$ og $\_Z1\sim = 0$.

Dette giver løsningen $\frac{\pi}{6}$.

Den anden løsning i intervallet $[0, 2\pi]$ finder du ved at sætte $\_B1\sim = 1$ og $\_Z1\sim = 0$.

Dette giver løsningen $\frac{5\pi}{6}$.

Eksempel 2

Løs ligningen $\cos(x) = \frac{1}{2}$ for $x \in [0, 2\pi]$

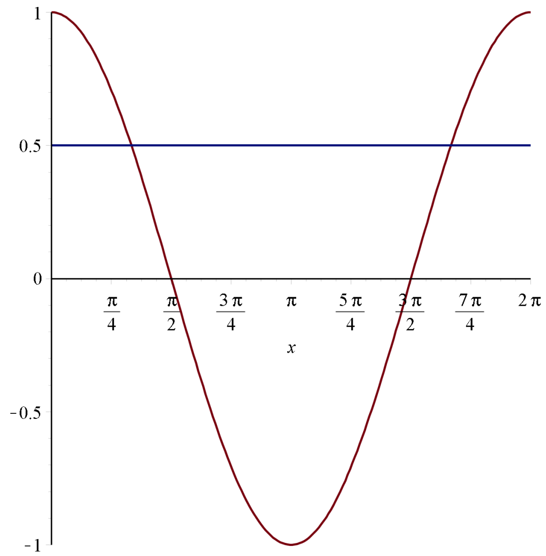
Ved brug af *solve* (symbolsk løsning), returnerer Maple blot en enkelt løsning:

$solve\left(\cos(x) = \frac{1}{2}, x\right)$

$$\frac{1}{3}\pi \tag{5.5}$$

For at illustrere problemet grafisk tegner vi graferne for $\cos(x)$ og $\frac{1}{2}$ i samme koordinatsystem:

$plot\left(\left[\cos(x), \frac{1}{2}\right], x = 0..2\pi\right)$



Her ses tydeligt, at der er to løsninger: Den ene i nærheden af 1 og den anden i nærheden af 5. Du kan finde de numeriske løsninger ganske præcist ved at benytte *fsolve* sammen med de aflæste (cirka) værdier som startværdier:

$fsolve\left(\cos(x) = \frac{1}{2}, x = 1\right)$

$$1.047197551 \tag{5.6}$$

$fsolve\left(\cos(x) = \frac{1}{2}, x = 5\right)$

$$5.235987756 \tag{5.7}$$

Eksempel 2 - symbolsk løsning (Avanceret)

Løs ligningen $\cos(x) = \frac{1}{2}$ for $x \in [0, 2\pi]$

Vi finder samtlige løsninger:

$$L := solve\left(\cos(x) = \frac{1}{2}, x, AllSolutions\right)$$

$$-\frac{2}{3}\pi\_B2{\sim} + \frac{1}{3}\pi + 2\pi\_Z2{\sim} \tag{5.8}$$

Den første løsning i intervallet $[0, 2\pi]$ finder du ved at sætte $\_B2{\sim} = 0$ og $\_Z2 = 0$.

Dette giver løsningen $\frac{\pi}{3}$.

Den anden løsning i intervallet $[0, 2\pi]$ finder du ved at sætte $\_B2{\sim} = 1$ og $\_Z2 = 1$.

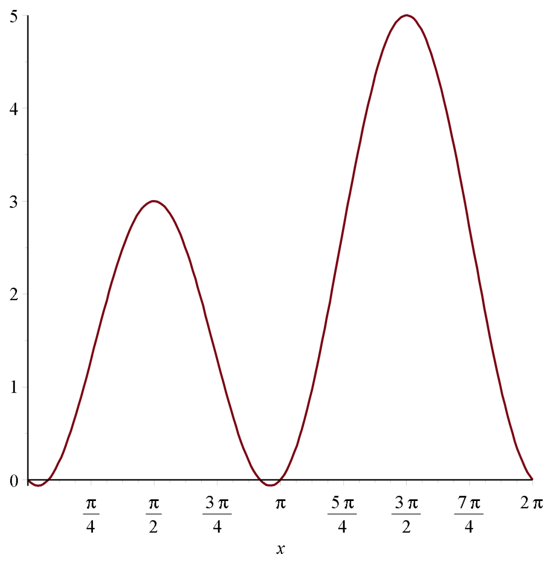
Dette giver løsningen $\frac{5\pi}{3}$.

Eksempel 3

Løs ligningen $4 \cdot \sin^2(x) - \sin(x) = 0, \; x \in [0, 2\pi]$

Lad os først tage et kig på ligningen grafisk:

$$plot\left(4\sin(x)^2 - \sin(x), x = 0..2\pi\right)$$



(5.9)

Det ser ud til, at der er 5 løsninger i intervallet $[0, 2\pi]$. Umiddelbart kan du aflæse, at 0, π og 2π er løsninger, og de to sidste ligninger kan du finde vha. *fsolve*.

Mere direkte er det at benytte en uhyre effektiv kommando fra *Student* pakken kaldet *Roots*,hvor du ud over ligningen skal indtaste det interval, du vil søge løsninger i:

$with(Student[Calculus1])$:

$Roots\left(4\sin(x)^2 - \sin(x) = 0, x = 0..2\pi\right)$

$$\left[0, \arcsin\left(\frac{1}{4}\right), \pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right), \pi, 2\pi\right] \tag{5.10}$$

Alle løsninger i intervallet $[0, 2\pi]$ er således fundet

5.3 Den harmoniske svingning

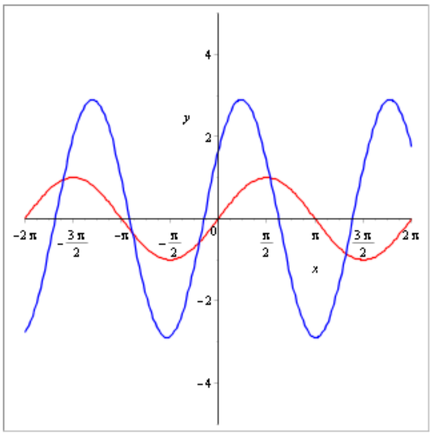
En harmonisk svingning er en funktion af formen

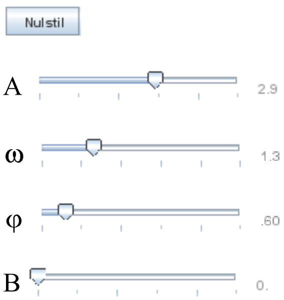
$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + B$$

hvor A er amplituden, ω er vinkelhastigheden, φ er fasen og B er forskydningen (op/ned).

Du kan undersøge betydningen af de indgående konstanter ved at lege lidt med figuen nedenfor. Her er tegnet to sinuskurver - en rød og en blå. Den blå ligger oven i den røde, så du ser kun den blå.

Den blå kurve kan deformeres ved at trække i skyderne nederst medens den røde kurve ligger fast som reference. Prøv!





Eksempel

Visse steder ændres vanddybden i havet på grund af tidevand. I et bestemt døgn er vanddybden $f(t)$, målt i meter, bestemt ved

$$f(t) = 7 + \sin\left(\frac{t-2}{2}\right), \quad 0 \le t \le 24$$

hvor t angiver antallet af timer efter kl. 12.

a) Bestem den største og den mindste vanddybde i døgnets løb.

b) Hvornår indtræffer det første højvande?

c) Hvor lang tid går der inden det næste højvande indtræffer?

d) På hvilke tidspunkter i dette døgn vokser vanddybden hurtigst?

Løsning med numerisk værktøj

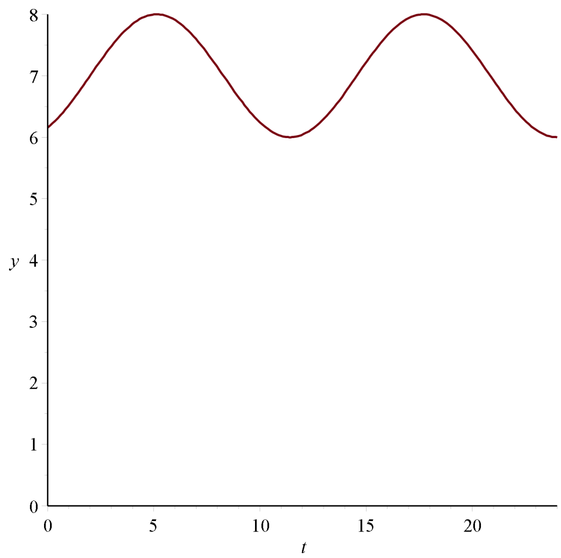
(Du kan naturligvis løse denne opgave udelukkende ud fra egenskaber for en harmonisk svingning)

Start med at definere funktionen i Maple og tegn grafen i det aktuelle interval - dvs. $t \in [0, 24]$:

$f := t \rightarrow 7 + \sin\left(\frac{t-2}{2}\right)$

$$t \rightarrow 7 + \sin\left(\frac{1}{2}t - 1\right) \tag{5.11}$$

$plot(f(t), t = 0..24, y = 0..8)$



a) Bestem den største og den mindste vanddybde i døgnets løb.
$maximize(f(t), t = 0..24)$

$$8 \tag{5.12}$$

$minimize(f(t), t = 0..24)$

$$6 \tag{5.13}$$

Dette viser, at

Mindste vanddybde = 6

Største vanddybde = 8

b) Hvornår indtræffer det første højvande?

Benyt her *maximize* med optionen *location*. Herved for du ud over maksimumsværdien også beregnet hvor maksimum antages:

$maximize(f(t), t = 0..24, location)$

$$8, \{[\{t = 2 + 5\pi\}, 8], [\{t = \pi + 2\}, 8]\} \tag{5.14}$$

$\pi + 2 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 5.1416$

Dvs., det første højvande indtræffer lidt efter kl 17 (idet t er tiden efter kl. 12.00).

c) Hvor lang tid går der inden det næste højvande indtræffer?

Denne opgave er klaret med beregningen i b):

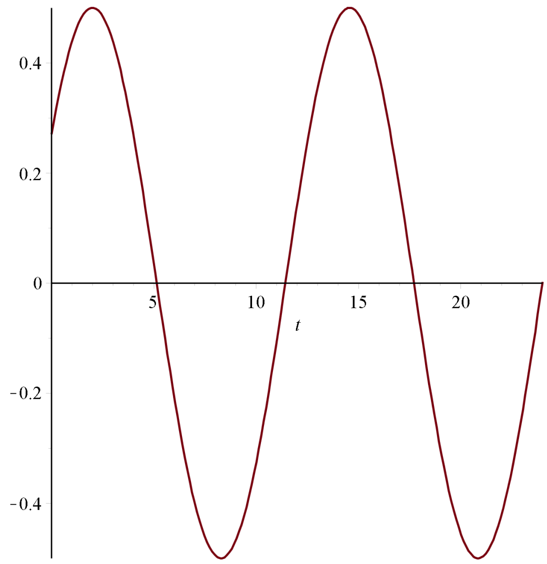
$5\pi + 2 - (\pi + 2) = 4\pi$

Dvs., der går 12.6 timer.

d) På hvilke tidspunkter i dette døgn vokser vanddybden hurtigst?

Det må være til de tidspunkter, hvor $f'(t)$ har maksimum. Tegn grafen for $f'(t)$:

$plot(f'(t), t = 0..24)$



$maximize(f'(t), t = 0..24, location)$

$$\frac{1}{2}, \left\{\left[\{t = 2\}, \frac{1}{2}\right], \left[\{t = 2 + 4\pi\}, \frac{1}{2}\right]\right\} \tag{5.15}$$

Det ses, at til tidspunkterne $t = 2$ og $t = 4\pi + 2$ har $f'(t)$ maksimum. Dvs., at til disse tidspunkter vokser vanddybden hurtigst. Tilbage er blot at omregne til tidspunkter efter kl. 12.00:

$4\pi + 2 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 14.566$

Vanddybden vokser hurtigst kl 14.00 og kl ca 02.30.

6 Rumfang af omdrejningslegemer

6.1 Omdrejningslegemer med Volume of Revolution Tutor

Lad f være en positiv funktion i intervallet $[a, b]$. Rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer ved at rotere punktmængden

$$\{(x, y) | a \le x \le b \quad \wedge \quad 0 \le y \le f(x)\}$$

$360°$ om x-aksen kan beregnes ved integralet

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

At beregne rumfang af omdrejningslegemer i Maple er således stort set kun en indsættelsesøvelse. Men i Maple kan du også lave en nydelig tegning af omdrejningslegemet.

Lad os se på et eksempel:

Find rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer ved at rotere punktmængden i første kvadrant begrænset af grafen for $f(x) = x^2$ og linjen $x = 2$.

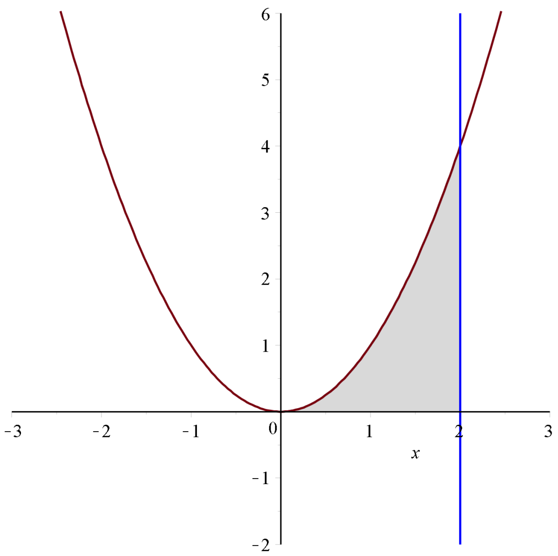
$f := x \to x^2 :$

Området tegnes:

$with(plots) :$

$p0 := plot(f(x), x = 0..2, filled = true, color = gray) :$
$p1 := plot(f(x), x = -3..3, y = -2..6) :$
$p2 := implicitplot(x = 2, x = -3..3, y = -2..6, color = blue) :$

$display([p0, p1, p2])$

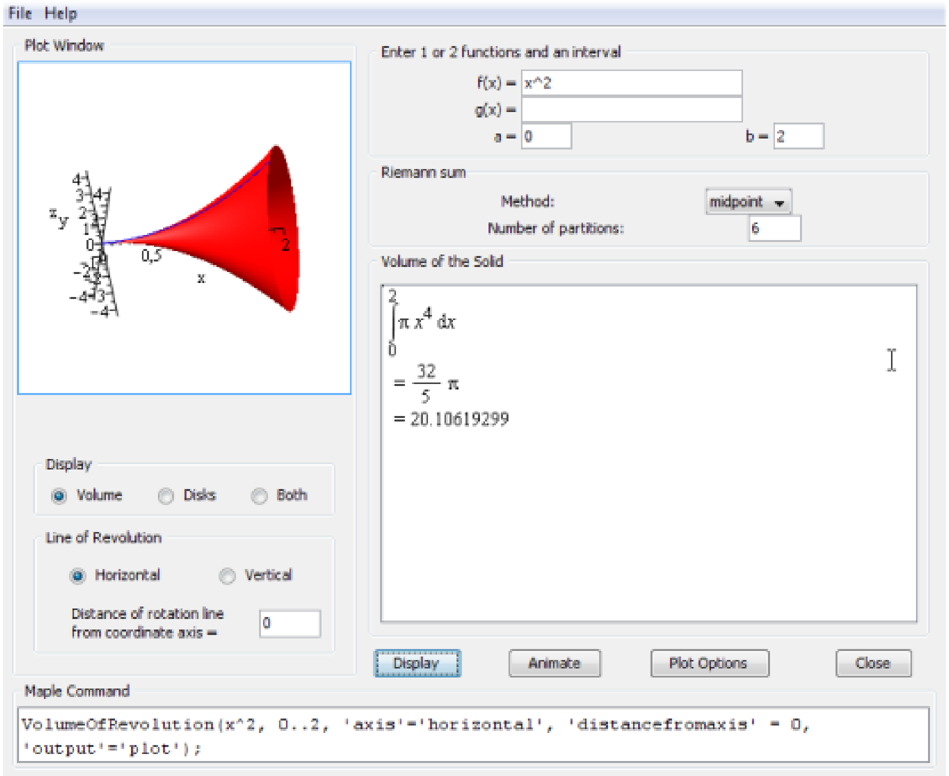


Rumfanget af omdrejningslegemet bliver:

$$\pi \cdot \int_0^2 f(x)^2 \, dx = \frac{32}{5} \pi$$

Nu skal du få en Maple Tutor til at klare al arbejdet (og lidt til):

Vælg **Tools > Tutors > Calculus - Single Variable > Volume of Revolution**, og du vil få et vindue som dette frem:



Indtast x^2 i feltet $f(x) =$. Intervalgrænserne a og b skal du ikke ændre på. Tilbage er blot at trykke på Display-knappen, så vil du se det samme billede som vist ovenfor.

Resultatet - både det symbolske og det tilnærmede - ser du i det store felt. Du kan dreje figuren ved at trække med musen. Læg mærke til, at grafen for $f(x) = x^2$ er tegnet med blåt på grafen.

Hvis du klikker på Close-knappen, lukker vinduet, og du får billedet af omdrejningslegemet indsat i dit dokument.

6.2 Eksempler

Eksempel 1

Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = 2\sqrt{x} \text{ og } g(x) = \frac{1}{2}x.$$

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer ved at lade området afgrænset af de to grafer rotere 360° om x-aksen.

Løsning uden brug af Tutor

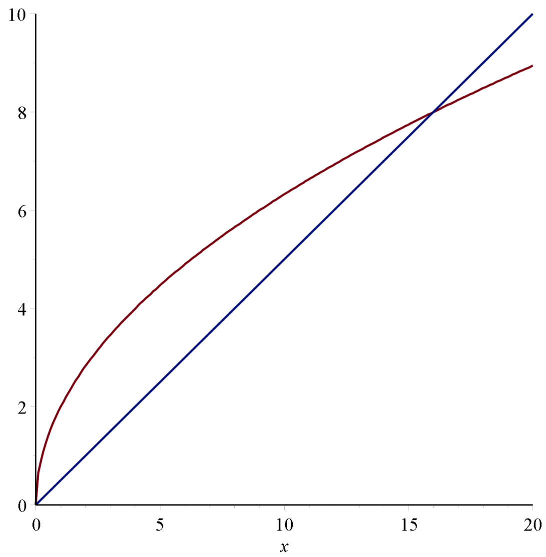
Først defineres de to funktioner, og graferne tegnes:
$f := x \rightarrow 2\sqrt{x}$

$$x \rightarrow 2\sqrt{x} \tag{6.1}$$

$g := x \rightarrow \frac{1}{2}x$

$$x \rightarrow \frac{1}{2}\,x \tag{6.2}$$

$plot([f(x), g(x)], x = 0..20)$



Skæringspunkterne bestemmes:
$solve(f(x) = g(x), x)$

$$0, 16 \tag{6.3}$$

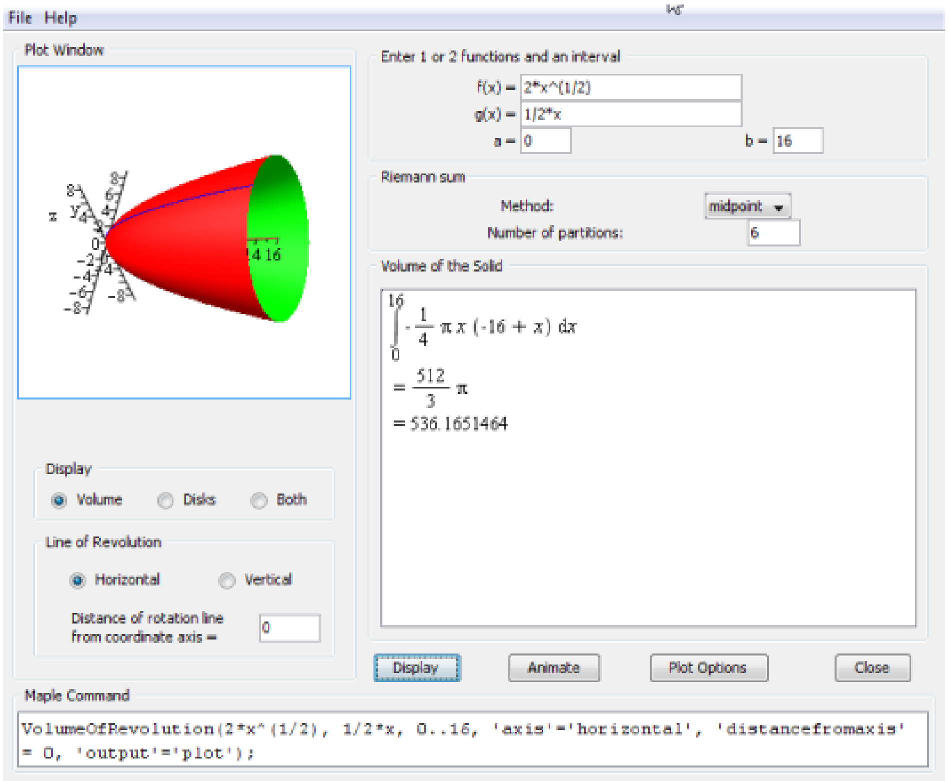
Volumenet bliver

$\pi \cdot \int_0^{16} f(x)^2 \, \mathrm{d}x - \pi \cdot \int_0^{16} g(x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{512}{3}\,\pi$

Løsning med Tutor

Ofte er det en god ide at definere funktionerne - som ovenfor - ellers skal du indtaste dem som:

2*sqrt(x) og x^2. Du kan ikke bruge skabelonen til kvadratrod i Tutoren. Så vil du slippe for at skulle skrive i en speciel syntaks, så definer funktionerne først og indtast blot f(x) og g(x) i de to felter. Skæringspunktet skal også bestemmes inden du starter Tutoren:



Selve resultatet kan du kopiere (med Ctrl C) og indsætte i en tekstregion efter at Tutoren er lukket.

$$\int_0^{16} -\frac{1}{4}\pi x(-16+x)\,dx$$
$$=\frac{512}{3}\pi$$
$$=536.1651464$$

Eksempel 2

Betragt de to funktioner

$$f(x)=4\cdot\sqrt{x-1} \text{ og } g(x)=-\frac{1}{5}x^2+2x+3$$

Graferne for funktionerne afgrænser sammen med koordinatakserne en punktmængde M,der har et areal. Funktionerne bruges som model for fremstilling af en træskål, som dannes, idet punktmængden M drejes 360° omkring x-aksen

a) Bestem skålens trærumfang

Løsning

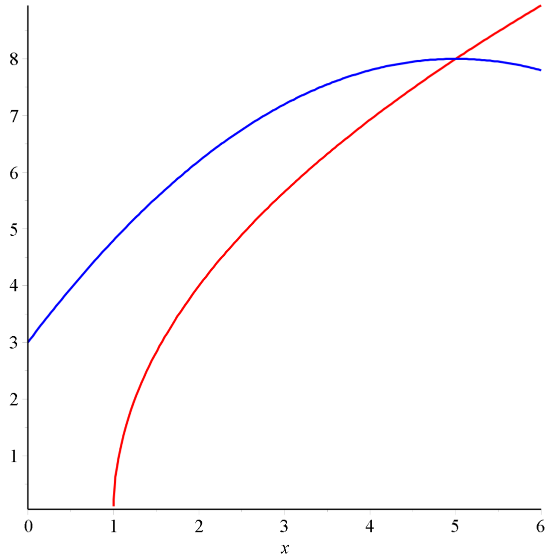
$f := x \rightarrow 4\cdot\sqrt{x-1}$

$$x \rightarrow 4\sqrt{x-1} \tag{6.4}$$

$g := x \to -\frac{1}{5}x^2 + 2x + 3$

$$x \to -\frac{1}{5}x^2 + 2x + 3 \tag{6.5}$$

$plot([f(x), g(x)], x = 0..6, color = [red, blue])$



Det ser ud til, at graferne skærer i 5. Lad os lige checke (*solve* giver 5 og et komplekst resultat, så det er en god idet blot at bruge *fsolve* her):

$fsolve(f(x) = g(x), x)$

$$5.000000000 \tag{6.6}$$

Du kan **ikke** umiddelbart bruge Tutoren i denne opgave, da de to intervaller, du skal integrere over, ikke er ens. Der er kun mulighed for ét interval i Tutoren (se nedenfor for en løsning på dette):

Rumfanget bliver (g er den øverste funktion - den blå!)

$\pi \cdot \int_0^5 g(x)^2 \, dx - \pi \cdot \int_1^5 f(x)^2 \, dx = \frac{251}{3}\pi$

Løsning med Tutor:

Hvis du vil bruge Tutoren, så er du nødt til at udvide f, således at den er defineret i $[0, 5]$. Det klares således (herved bliver værdien af integralerne ikke ændret):

$F := x \to \begin{cases} 0 & x < 1 \\ f(x) & x \geq 1 \end{cases}$

$$x \to piecewise(x < 1, 0, 1 \leq x, f(x)) \tag{6.7}$$

Indtast så g(x) og F(x) som de to funktioner i Tutoren og indstil intervallet til $[0, 5]$. Så får du samme resultat som ovenfor

6.3 Flere muligheder i Volume of Revolution Tutor

Der er endnu flere muligheder i Volume of Revolution Tutor. Fx kan du rotere om enhver lodret linje - og ikke blot x-aksen. Desuden er der også mulighed for at rotere om y-aksen.

Du kan også bruge Volume of Revolution Tutor til at forstå noget af teorien bag rumfang af omdrejningslegemer:

Du kan vælge at skære omdrejningslegemet op i et antal lige tykke skiver. Antallet indstiller du i **Number of Partitions** feltet. Som standard er valgt 6.

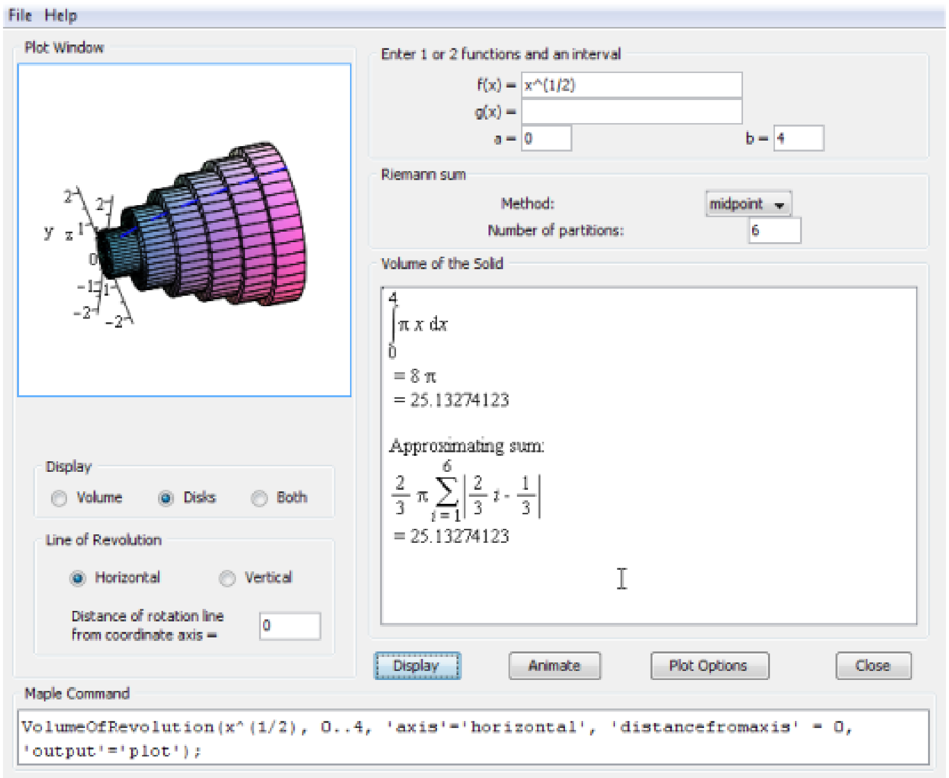
Hver af disse skiver skal approksimeres med en cylinder. Cylinderens højde er fastlagt ved tykkelsen af skiven, men radius kan vælges på 3 måder: Venstre endepunkt, højre endepunkt eller midtpunktet. Dit valg skal du indstille i **Method** drop-down listen.

Under plot-vinduet finder du en række radio-knapper. Tryk her på den midterste **Disks**, så vises plottet med de skiver, du har valgt.

I det store felt kan du se, hvad det eksakte rumfang er. Desuden kan du se, hvad rumfanget af dine diske er. Hvis du øger antallet af skiver, skulle du gerne se, at rumfanget af dine diske nærmer sig det eksakte rumfang - uanset valget af radius (left, midpoint, right).

Eksperimenter!

Nedenfor ser du, hvordan det kommer til at se ud med funktionen $\sqrt{x}$.



7 Eksakt løsning af 1. ordens differentialligninger

7.1 Eksakt løsning af differentialligninger i Maple

Du kan løse ganske mange typer af differentialligninger eksakt i Maple, men her vil vi blot nøjes med at se på nogle simple, men typiske eksempler.

En differentialligning som fx

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y$$

skal i Maple formuleres således:

$y'(x) = 2 \cdot x + y(x)$

$$\frac{d}{dx} y(x) = 2x + y(x) \tag{7.1}$$

Hvor du eksplicit gør opmærksom på, at y er en funktion af x. I stedet for at bruge notationen $y'(x)$ kan du anvende differentiationssymbolet $\frac{d}{dx} y(x)$, men den førstnævnte er ofte mere bekvem at anvende.

Du løser differentialligningen ved at højreklikke (Mac: cmd+klik), og vælge **solve DE > y(x)**

$y'(x) = 2x + y(x) \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = -2 - 2x + e^x \_C1$

- eller benytte kommandoen *dsolve* :

$dsolve(\ y'(x) = 2 \cdot x + y(x), y(x)\ )$

$$y(x) = -2 - 2x + e^x \_C1 \tag{7.2}$$

Hvor $\_C1$ er en konstant.

Bibetingelser

1)

Har du oplyst et punkt, hvor løsningen skal gå i gennem, fx $(0, 2)$, kan du tilføje bibetingelsen således:

$dsolve(\ \{y'(x) = 2 \cdot x + y(x), y(0) = 2\}, y(x)\ )$

$$y(x) = -2 - 2x + 4\,e^x \tag{7.3}$$

2)

Får du fx oplyst, at løsningskurven har vandret tangent for $x = 2$, så ved du, at $y'(2) = 0$. Dette tilføjer du som bibetingelse:

$dsolve(\ \{y'(x) = 2 \cdot x + y(x), y'(2) = 0\}, y(x)\ )$

$$y(x) = -2 - 2x + \frac{2\,e^x}{e^2} \tag{7.4}$$

7.2 Interactive Solver

Du kan undgå at skulle huske en masse syntaks ved at benytte Interactive Solver. Det fungerer således:

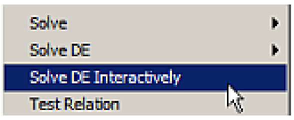
Indtast differentialligningen (som ovenfor)
$y'(x) = 2 \cdot x + y(x)$

$$\frac{d}{dx} y(x) = 2x + y(x) \tag{7.5}$$

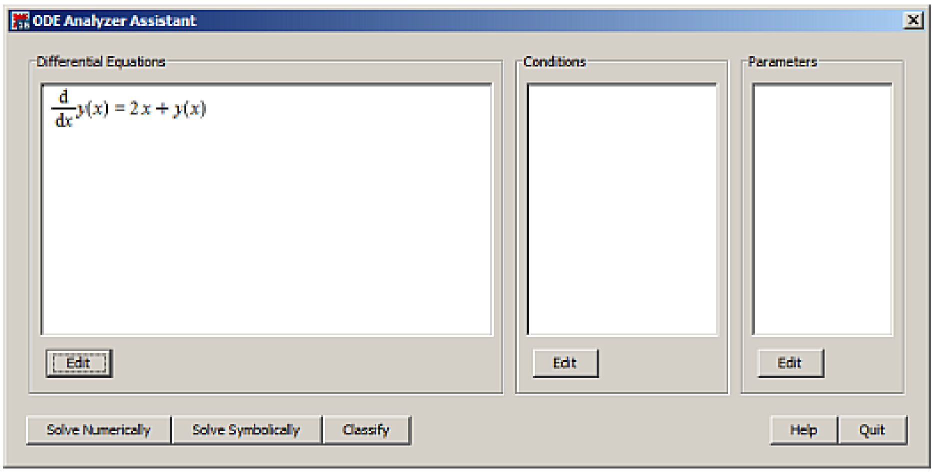
$\xrightarrow{\text{solve DE interactively}}$

$$y(x) = -2 - 2x + 4e^{x}$$

Højreklik (Mac: cmd+klik) på differentialligningen, vælg **Solve DE Interactively** i kontekstmenuen

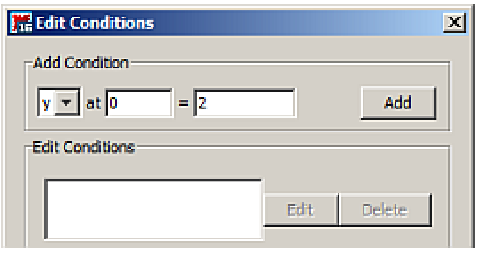


og ODE Analyzer Assistant frem:

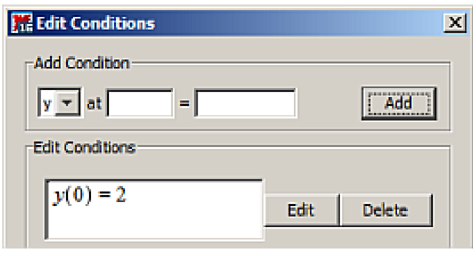


Differentialligningen er på plads i den første rude. I den midterste rude kan bibetingelser indtastes.

Tryk på Edit-knappen under den midterste rude. Den nye dialog, der kommer frem, udfylder du som vist nedenfor

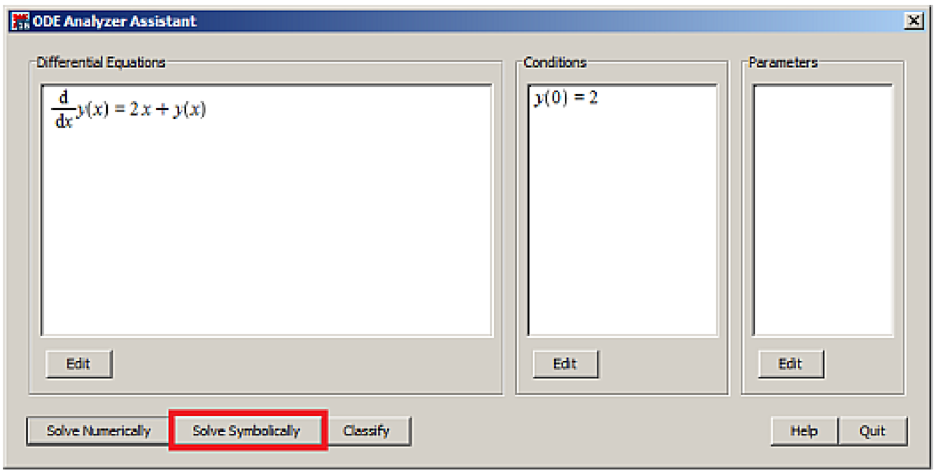


Tryk Add >

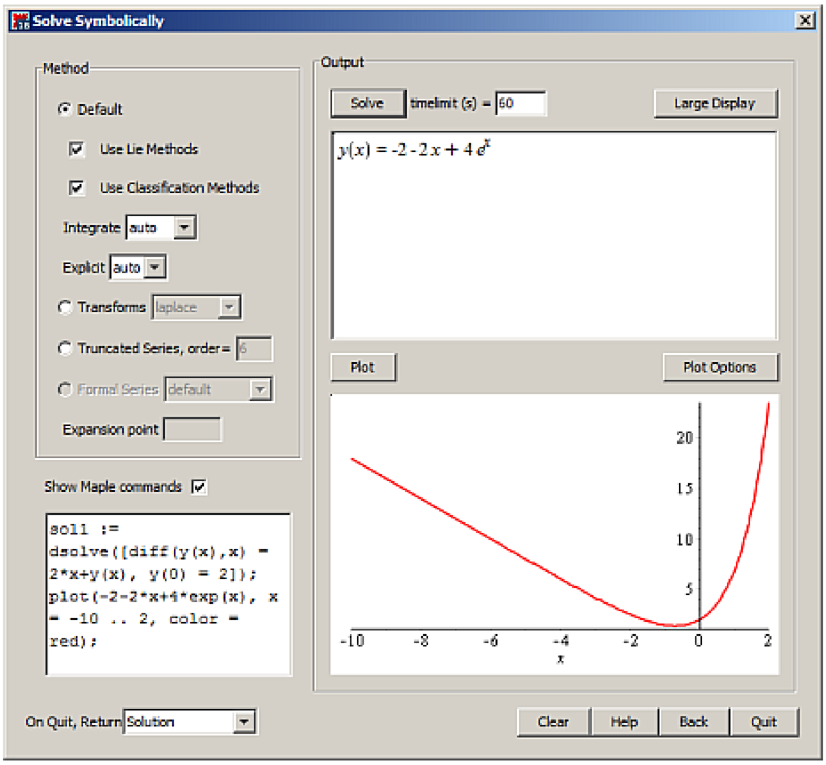


Afslut med at trykke på **Done**-knappen.

Herefter skulle ODE Analyzer Assistant gerne se sådan ud:

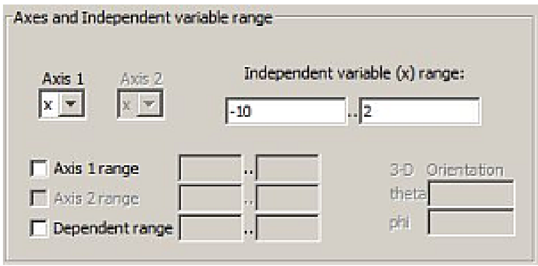


Tryk på knappen **Solve Symbolically**.

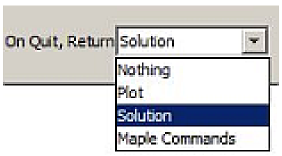


For at få dette resultat frem, skal du gøre sådan her:

1. Tryk på **Solve**-knappen. Det vil give dig løsningen i den øverste rude.
2. Tryk på **Plot**-knappen. Den graf, der kommer frem, er du næppe tilfreds med, idet den er tegnet i et standardinterval. Klik på **Plot Options**, og indstil som vist på klippet nedenfor, og tryk på Done, når du har lavet indstillingerne:



3. Hvis du sætter et flueben i feltet **Show Maple commands**, vil du se alle de Maplekommandoer, der skal til, for dels at løse differentialligningen, og dels at tegne grafen med de ønskede indstillinger.
4. Du kan forlade assistenten på flere måder afhængigt af dit valg i **On Quit Return**:



Ofte kan det være hensigtsmæssigt at returnere Maple kommandoerne. Disse kommandoer kan med fordel redigeres en smule, da de ikke altid står med den smukkeste typografi.

7.3 Eksempler af typen y' = ay

Eksempel 1

Bestem samtlige løsninger til differentialligningen:

$y' = 0.25\, y$

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = 0.25\, y(x) \tag{7.6}$$

$dsolve(y'(t) = 0.25\, y(t), y(t))$

$$y(t) = \_C1\, e^{\frac{1}{4}\, t} \tag{7.7}$$

hvor $\_C1$ er en konstant. Med almindelig skriveform, er den fuldstændige løsning bestemt ved $y = c \cdot e^{\frac{1}{4} t}$.

Eksempel 2

Bestem en regneforskrift for den løsning til differentialligningen

$y' = -1.2 \cdot y$,

der går gennem punktet $(2, 5)$.
$dsolve(\{y'(t) = -1.2 \cdot y(t), y(2) = 5\}, y(t))$

$$y(t) = \frac{5\, e^{-\frac{6}{5}\, t}}{e^{-\frac{12}{5}}} \tag{7.8}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$y(t) = 55.115\, e^{-1.2000\, t}$$

Eksempel 3

Funktionen f er løsning til differentialligningen

$y' = 0.1 \cdot y$

Linjen med ligningen $y = 2\, x + 4$ er tangent til grafen for f.

Bestem koordinaterne til det punkt som linjen tangerer grafen i, og bestem en regneforskrift for f.

Løsning

Tangeringen må ske i et punkt, hvor $y' = 2$. Indsættes dette i differentialligningen fås:

$2 = 0.1\, y \xrightarrow{\text{solve}} \{y = 20.\}$

Dette viser, at y koordinaten til tangeringspunktet er 20. x-koordinaten findes ved at indsætte $y = 20$ i tangentligningen:

$20 = 2\, x + 4 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 8\}$

Tangeringen sker altså i punktet $(8, 20)$. Differentialligningen kan nu løses:

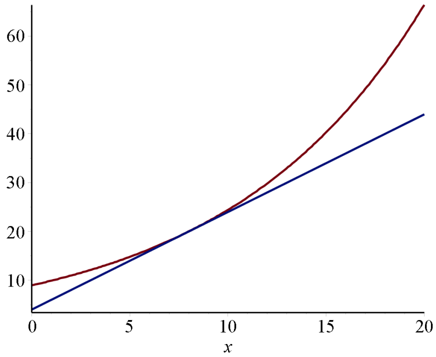
$dsolve(\{y'(x) = 0.1\,y(x), y(8) = 20\}, y(x))$

$$y(x) = \frac{20\,\mathrm{e}^{\frac{1}{10}x}}{\mathrm{e}^{\frac{4}{5}}} \tag{7.9}$$

$f := x \rightarrow \frac{20\,\mathrm{e}^{\frac{1}{10}x}}{\mathrm{e}^{\frac{4}{5}}}$:

Lad os for en god ordens skyld tegne løsningskurven sammen med tangenten $y = 2x + 4$:

$plot(\{f(x), 2x + 4\}, x = 0..20)$



7.4 Eksempler af typen y' = b - ay

Eksempel 4

Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$y' = 15 - 2.25 \cdot y$:

$dsolve(y'(x) = 15 - 2.25 \cdot y(x), y(x))$

$$y(x) = \frac{20}{3} + \mathrm{e}^{-\frac{9}{4}x}\,\_C1 \tag{7.10}$$

Dvs., at den fuldstændige løsning er $y = \frac{20}{3} + c \cdot \mathrm{e}^{-2.25\,x}$, hvor $c \in R$.

Eksempel 5

Funktionen f er løsning til differentialligningen

$y' = a \cdot (y - 15)$.

Endvidere er $f(0) = 30$ og $f(3) = 25$.

Bestem værdien af tallet a, og bestem en regneforskrift for f.

Løsning

Differentialligningen løses først sammen med ét af punkterne (ligegyldigt hvilket):

$dsolve(\{y'(x) = a\cdot(y(x) - 15), y(0) = 30\}, y(x))$

$$y(x) = 15 + 15\,\mathrm{e}^{a\,x} \tag{7.11}$$

Dernæst indsættes punktet $(3, 25)$, og der løses med hensyn til a:

$25 = 15 + \mathrm{e}^{a\cdot 3} \xrightarrow{\text{solve}} \left\{a = \frac{1}{3}\ln(10)\right\}$

Forskriften for f bliver således:

$f := x \to 15 + 15\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(10)\cdot x}$

$$x \to 15 + 15\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(10)\,x} \tag{7.12}$$

Hvis du gerne vil se et undtryk med decimaltal i stedet for de eksakte værdier, så klarer *evalf* sagen:

$evalf(f(x))$

$$15. + 15.\,\mathrm{e}^{0.7675283643\,x} \tag{7.13}$$

7.5 Eksempler - andre typer

Eksempel 6

Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\cdot y}{2}$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $(1, 4)$.

Løsning

$dsolve\left(\left\{y'(x) = \frac{x\cdot y(x)}{2}, y(1) = 4\right\}, y(x)\right)$

$$y(x) = \frac{4\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x^2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}} \tag{7.14}$$

Dvs., at løsningen er $y = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x^2}$.

Eksempel 7

Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 5}{y}$$

hvis graf går gennem punktet $(0, 4)$.

Løsning

$$dsolve\left(\left\{y'(x) = \frac{x+5}{y(x)}, y(0) = 4\right\}, y(x)\right)$$

$$y(x) = \sqrt{x^2 + 10\,x + 16} \tag{7.15}$$

Af differentialligningen ses, at $y \neq 0$. Dvs., at ligningen skal løses i området $R \times R_+$. Desuden skal $x^2 + 10\,x + 16 > 0$:

$$solve\left(x^2 + 10\,x + 16 > 0, x\right)$$

$$RealRange(-\infty, Open(-8)), RealRange(Open(-2), \infty) \tag{7.16}$$

Heraf ses, at $Dm(y) =]-2, \infty[$

7.6 Eksempler af typen y' = ay(M - y)

Eksempel 8

Løs differentialligningen

$$N' = 0.0003 \cdot (500 - N) \cdot N$$

med begyndelsesværdi $N(0) = 25$ og med begyndelsesværdi $N(0) = 750$.

Løsning

$$dsolve(\{N'(t) = 0.0003 \cdot (500 - N(t)) \cdot N(t), N(0) = 25\}, N(t))$$

$$N(t) = \frac{500}{1 + 19\,e^{-\frac{3}{20}\,t}} \tag{7.17}$$

$$dsolve(\{N'(t) = 0.0003 \cdot (500 - N(t)) \cdot N(t), N(0) = 750\}, N(t))$$

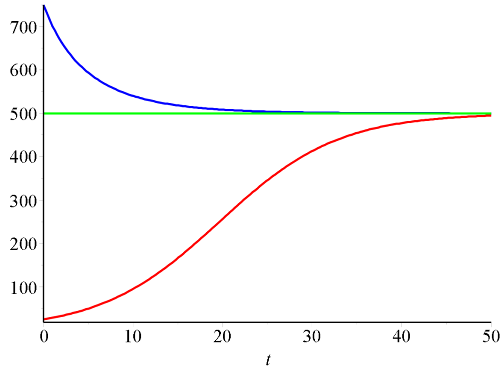
$$N(t) = -\frac{1500}{e^{-\frac{3}{20}\,t} - 3} \tag{7.18}$$

Lad os tegne graferne for de to løsninger. Først skal de dog defineres som funktioner:

$$N1 := t \rightarrow \frac{500}{1 + 19\,e^{-\frac{3}{20}\,t}} :$$

$$N2 := t \rightarrow -\frac{1500}{e^{-\frac{3}{20}t} - 3}:$$

$plot([N1(t), N2(t), 500], t = 0..50, color = [red, blue, green])$



Eksempel 9

Udviklingen af indbyggertallet i en tænkt storby kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = a \cdot N \cdot (1000000 - N)$$

hvor N er antallet af indbyggere i byen, t er tiden, målt i døgn, og a er en konstant.

Til tiden $t = 0$ er antallet af indbyggere i byen 100000, og når indbyggertallet er 200000 vokser indbyggertallet med 100 indbyggere pr. døgn.

a) Bestem en forskrift for N.

b) Hvor mange døgn går der før der er 600000 indbyggere i byen i følge modellen?

Løsning

Ud fra oplysningen 'når indbyggertallet er 200000 vokser indbyggertallet med 100 indbyggere pr. døgn' kan vi bestemme a ved indsættelse i differentialligningen:

$$100 = a \cdot 200000 \cdot (1000000 - 200000) \xrightarrow{\text{isolate for a}} a = \frac{1}{1600000000}$$

$dsolve(\{N'(t) = a \cdot N(t) \cdot (1000000 - N(t)), N(0) = 100000\}, N(t))$

$$N(t) = \frac{1000000}{1 + 9\,e^{-\frac{1}{1600}t}} \tag{7.19}$$

Vi definerer funktionen N :

$$N := t \rightarrow \frac{1000000}{1 + 9\,e^{-\frac{1}{1600}t}}:$$

b)

$$N(t) = 600000 \xrightarrow{\text{solve}} 4164.303497$$

Der vil således gå ca. 4164 døgn - eller ca 12 år før befolkningstallet når 600000.

8 Linjeelementer

8.1 Linjeelementer og løsningskurver

Differentialligningen $y' = x + y(x)$, eller skrevet med Maple syntaks

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = x + y(x) \tag{8.1}$$

kan tolkes således, at den i ethvert punkt (x_0, y_0) giver oplysning om tangenthældningen α for en eventuel løsningskurve gennem dette punkt.

Kaldes løsningskurve for f, gælder

$$f(x_0) = y_0 \text{ og } f'(x_0) = \alpha.$$

Dette kan udtrykkes ved, at f går gennem linjeelementet $(x_0, y_0;\ \alpha)$. Fx vil løsningskurven gennem punktet $(2, 1)$ have tangenthældningen

$$y'(2) = 2 + y(2) = 2 + 1 = 3$$

Med andre ord, så vil løsningskurven gå gennem linjeelementet $(2, 1;\ 3)$.

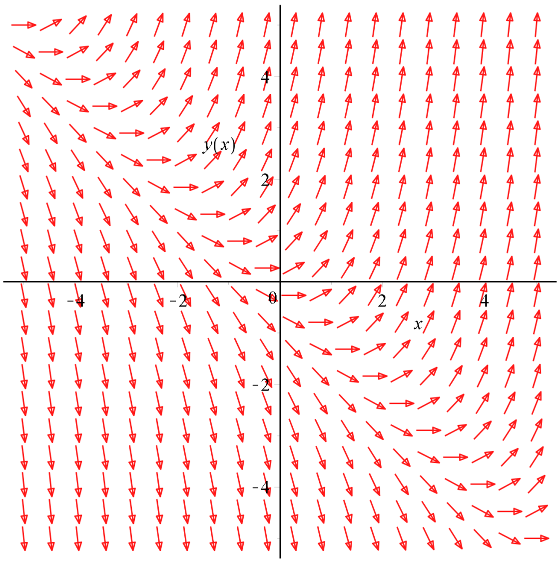
For at kunne danne sig et indtryk af løsningskurvernes forløb, kan man tegne nogle linjeelementer ind i et koordinatsystem:

Går løsningskurven gennem linjeelementet $(x_0, y_0;\ \alpha)$, tegnes gennem punktet (x_0, y_0) et lille linjestykke med hældningen α.

Det bliver hurtigt et trivielt stykke arbejde, men her kommer Maple os til undsætning. I pakken *DEtools* ligger en kommando *DEplot*, der er skabt til opgaven (*DEplot* kræver at pakken *plots* er indlæst):

with(*plots*) : *with*(*DEtools*) :

$DEplot(y'(x) = \mathrm{x} + \mathrm{y}(\mathrm{x}), y(x), x = -5\,..5, y = -5\,..5, arrows = medium)$



Opgaven er nu at indtegne løsningskurver således at pilene er tangenter til kurverne. Dette er en opgave, der kræver lidt øvelse, men umiddelbart ser det ud til, at en ret linje kan tegnes gennem $(0,-1)$ med hældning -1. Dvs, at det ser ud til, at $f(x) = -x - 1$ er en løsning til differentialligningen **(8.1)**. Lad os checke:

Hvis f er en løsning, skal der ifølge **(8.1)** gælde, at

$$f'(x) = x + f(x)$$

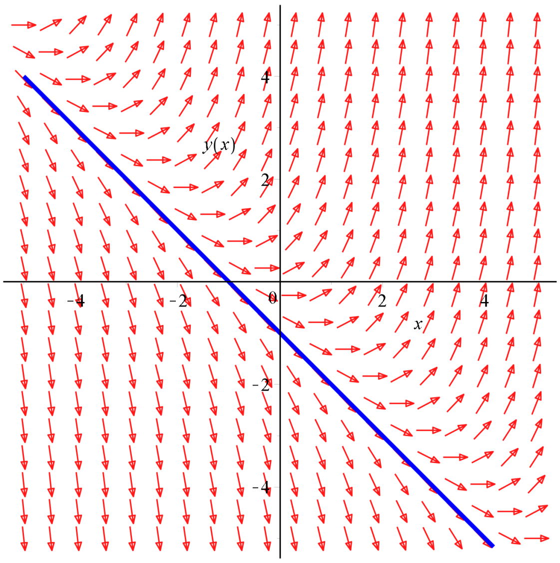
Vi regner begge sider ud hver for sig (med $f(x) = -x - 1$), og undersøger, om vi får det samme

$f'(x) \;=\; (-x - 1)' \;=\; -1$

$x + f(x) \;=\; x + (-x - 1) \;=\; -1$

Dvs., at $f(x) = -x - 1$ er en løsning til **(8.1)**. Vi tegner den ind (i princippet ved håndkraft), men du kan få Maple til at tegne løsningskurven med kommandoen vist nedenfor. Det eneste specielle er, at du skal angive et punkt på den løsningskurve, du vil have tegnet. Et oplagt punkt at vælge er $(0, -1)$, men ethvert andet punkt på linjen kan selvfølgelig også bruges. Maple kræver, at du angiver dette punkt som en liste på formen $[y(0) = 1]$.

$DEplot(y'(x) = x + y(x), y(x), x = -5..5, y = -5..5, [y(0) = -1], arrows = medium, linecolor = blue)$



Denne linje skiller så at sige vandene: Kurverne over linjen vil alle have et minimum, mens kurverne under linjen vil være aftagende. Desuden vil minimum for kurverne over linjen ligge på linjen $y = -x$. Kan du forklare dette?

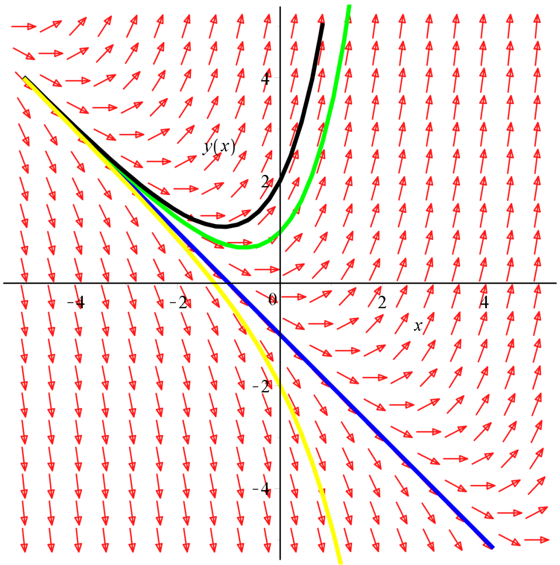
Du kan få tegnet andre løsningskurver ved blot at ændre værdien af $y(0)$. Prøv!

Når Maple kræver den specielle liste-syntaks hænger det sammen med, at man ofte vil tegne flere løsningskurver i samme system, og således blot kan udvide listen. Her er det almindelig vis god skik at holde denne liste uden for *DEplot*-kommandoen:

$ic := [y(0) = -1, y(0) = 1, y(0) = 2, y(0) = -2]$

$$[y(0) = -1, y(0) = 1, y(0) = 2, y(0) = -2] \tag{8.2}$$

$DEplot(y'(x) = x + y(x), y(x), x = -5..5, y = -5..5, ic, arrows = medium, linecolor = [blue, green, black, yellow])$



Navnet *ic* står for *Initial Condition*, hvilket på dansk betyder begyndelsesbetingelser.

8.2 Eksempler og øvelser

Eksempel 1

For at tegne linjeelementer for en differentialligning behøver du blot 3 kommandolinjer - og de er stort set de samme hver gang: Du skal selvfølgelig ændre differentialligningen, plotintervallerne og startbetingelserne.

Lad os prøve med differentialligningen $y' = x \cdot y^2$:
$y'(x) = x \cdot y(x)^2$

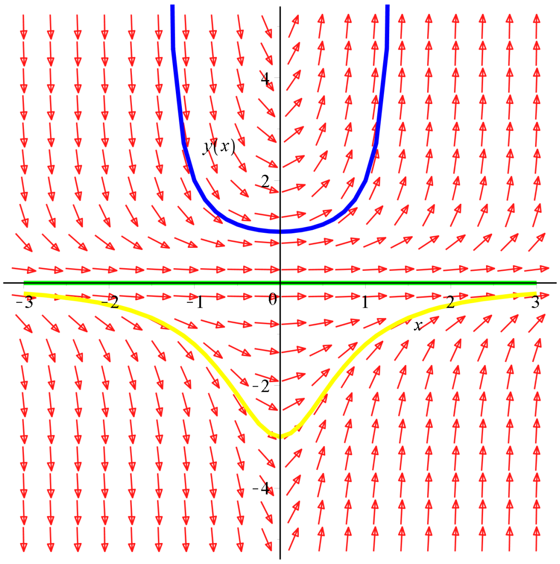
$$\frac{d}{dx}\, y(x) = x\, y(x)^2 \tag{8.3}$$

$ic := [y(0) = 1, y(0) = -3, y(0) = 0]$

$$[y(0) = 1, y(0) = -3, y(0) = 0] \tag{8.4}$$

$with(DETools):$

$DEplot\left(y'(x) = x \cdot y(x)^2, y(x), x = -3..3, y = -5..5, ic, arrows = medium, linecolor = [blue, yellow, green]\right)$



Øvelse 1

Tegn linjeelementer og et passende antal løsningekurver for differentialligningerne:

1. $y' = -\dfrac{x}{y}$

2. $y' = \dfrac{x}{y}$

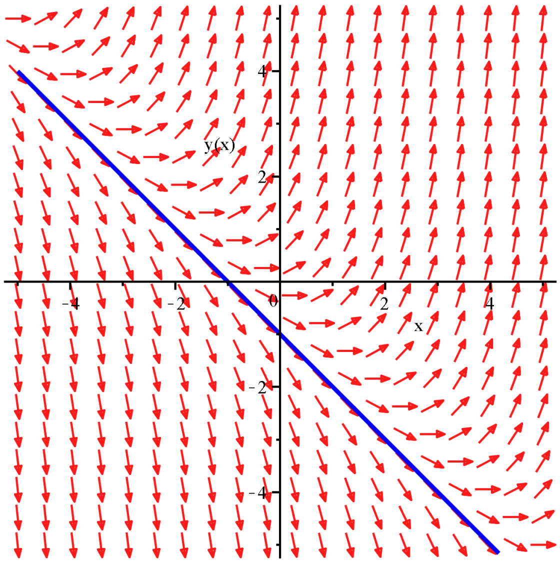
3. $y' = \dfrac{y}{x}$

Beskriv løsningskurverne og kom med et bud på et analytisk udtryk for en eller flere af løsningerne. Check dit bud ved at indsætte i differentialligningen.

Øvelse 2

a.

Tag et kig på den lineære løsning til differentialligningen $y' = x + y$:



Med en vis ret kan den lineære løsning siges at være *frastødende*. Tegn linjeelementer og find lineære løsninger til differentialligningerne:

$$y' = x - y \quad y' = -x + y \quad y' = -x - y$$

og retfærdiggør begreberne frastødende/tiltrækkende.

b.

Tegn linjeelementer for $y' = y^2 - x$ og et passende antal løsningskurver. Findes der tiltrækkende/frastødende kurver her?

8.3 Projekt: Logistisk vækst med jagt/fiskeri

Som eksempler på anvendelser af differentialligninger kan vi se på vækstmodeller. Den logistiske vækst, her eksemplificeret ved

$$y' = 2y - \frac{1}{2}y^2$$

er et godt udgangspunkt.

a.

Tegn linjeelementer og tegn typiske løsningskurver. Find de stationære (dvs. konstante) løsninger og marker, hvilken der er tiltrækkende og hvilken der er frastødende.

b.

Hvis der skal inkluderes jagt/fiskeri i modellen, kan det gøres simpelt ved at trække en konstant fra:

$$y' = 2y - \frac{1}{2}y^2 - a$$

konstanten repræsenterer da den hastighed, hvormed der skydes/fiskes i populationen.

Tegn typiske løsningskurver for $a = \frac{3}{2}$ og $a = 2$. Angiv de stationære løsninger i tilfældet for $a = \frac{3}{2}$, og marker, hvilken der er tiltrækkende og hvilken der er frastødende.

Forklar, hvorfor der ikke kan være stationære løsninger i tilfældet $a = 3$. Bestem den kritiske værdi for a, hvor de stationære løsninger forsvinder, og gør rede for, hvilke konsekvenser det har for populationen, hvis jagten/fiskeriet overstiger den kritiske værdi.

c.

Hvis der inkluderes sæsonsvingninger i modellen kan differentialligningen fx ændres til denne

$$y' = (2 + \cos(x)) \cdot y - \frac{1}{2}y^2 - a$$

Lav nogle løsningskurver for tilfældet $a = 1$. De konstante løsninger er forsvundet, men i stedet dukker nogle periodiske løsninger op, hvor den ene er tiltrækkende og den anden frastødende.

Lav også nogle løsningekurver for tilfældet $a = 2$, og forklar, hvorfor der ikke kan være periodiske løsninger i dette tilfælde.

Find gennem eksperimenter den kritiske værdi for a (1 dec.), hvor de periodiske løsninger forsvinder, og gør rede for, hvilke konsekvenser det har for populationen, hvis jagten/fiskeriet overstiger den kritiske værdi.

9 Differentialligningsmodeller

9.1 En rygtespredningsmodel

Scenarie

En fremmed kommer til en by med 10000 indbyggere og sætter et rygte i gang. Hvordan vil rygtet spredes?

På ethvert tidspunkt under rygtespredningen vil der være tre slags personer tilstede i byen

- *ignoranterne* - dem, som endnu ikke har hørt rygtet
- *sprederne* - dem, som har hørt rygtet og fortæller det videre til alle de møder
- *uinteresserede* - dem, som er tidligere spredere, men nu har mistet interessen i at sprede rygtet.

Antag, at så snart en spreder videregiver rygtet til en, der allerede har hørt rygtet, bliver vedkommende uinteresseret i at sprede rygtet.Antag endvidere, at møder mellem alle tre persontyper finder sted helt tilfældigt.

Opstilling af differentialligninger

Betegn antal ignoranter med i, antal spredere med s og antal uinteresserede med u. Ændringer, der sker i i, s og u ved et møde mellem en spreder og en anden person, kan så beskrives:

En spreder møder en ignorant og videregiver rygtet:

Totalt kan der arrangeres $i \cdot s$ møder mellem en spreder og en ignorant. Hvis rygtet videregives ved et møde, vil der være en ignorant mindre og en spreder mere, altså $i \rightarrow i - 1,\ s \rightarrow s + 1$.

En spreder møder en spreder og prøver at videregive rygtet:

Totalt kan der arrageres $K(s,2) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1)$ møder mellem to spredere. Hvis rygtet forsøges videregivet ved et møde, vil der være to spredere mindre og to uinteresserede mere, altså $s \rightarrow s - 2, u \rightarrow u + 2$.

En spreder møder en uinteresseret og prøver at videregive rygtet:

Totalt kan der arrageres $u \cdot s$ møder mellem en spreder og en uinteresseret. Hvis rygtet forsøges videregivet ved et møde, vil der være en spreder mindre og en uinteresseret mere, altså $s \rightarrow s - 1,\ u \rightarrow u + 1$.

Rygtet kan kun spredes når en spreder møder en ignorant. Det vil derfor være rimeligt at antage, at den hastighed, hvormed rygtet spredes vil være proportional med antallet af møder mellem spredere og ignoranter.

Dette fører til differentialligningen

$$\frac{di}{dt} = -k \cdot i \cdot s$$

hvor $k > 0$ er en konstant. Minusset skyldes, at antallet af ignoranter er aftagende.

Antallet af spredere kan ændres på tre måder og hastigheden, hvormed dette sker, kan udtrykkes således

$$\frac{ds}{dt} = k \cdot i \cdot s - k \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1) - k \cdot s \cdot u$$

hvor der første led kommer fra møder mellem spredere og ignoranter, det andet led fra møder mellem spreder — 2-tallet skyldes at antallet af spredere reduceres med 2 ved den slags møder — og det tredje led fra møder mellem spredere og uinteresserede.

Da $i + s + u = 10001$ (husk den fremmede), er $u = 10001 - i - s$. Dette indsættes i differentialligningen ovenfor, der herefter reduceres til

$$\frac{ds}{dt} = k \cdot (2 \cdot i \cdot s - 10000\, s)$$

Dette giver følgende differentialligningssystem til beskrivelse af rygte-spredningen

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = -k \cdot i \cdot s \\ \dfrac{ds}{dt} = k \cdot (2 \cdot i \cdot s - 10000\, s) \end{cases}$$

Til at begynde ($t = 0$) med er der 10.000 ignoranter og én spreder. k skal naturligvis også have en værdi. Den kan der eksperimenteres med, men sæt i første omgang $k = 0.0001$.

Løsning i Maple

Differentialligningerne og begyndelsesbetingelserne er nu klar til indtastning i Maple (det nemmeste er nok at løse systemet i den interaktive solver ved at højreklikke på linjen nedenfor):

$i'(t) = -k \cdot i(t) \cdot s(t),\ s'(t) = k \cdot (2 \cdot i(t) \cdot s(t) - 10000\, s(t))$

$$\mathrm{D}(i)(t) = -k\, i(t)\, s(t),\ \mathrm{D}(s)(t) = k\,(2\, i(t)\, s(t) - 10000\, s(t)) \tag{9.1}$$

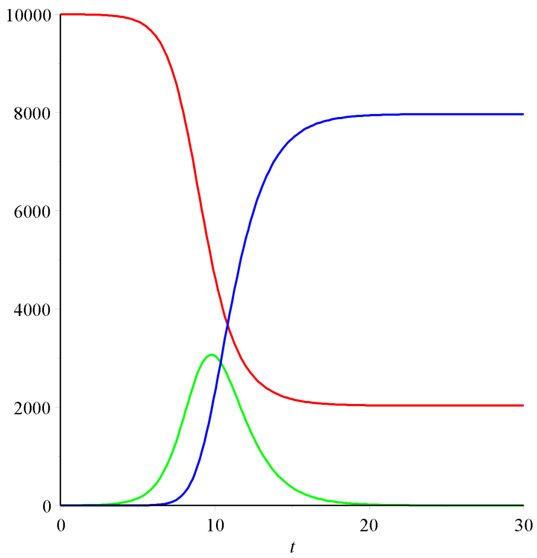
$sol := dsolve([\mathbf{(1.1.3.1)}, i(0) = 10000, s(0) = 1], numeric, parameters = [k]);$

$$\mathbf{proc}(x\_rkf45)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc} \tag{9.2}$$

$sol(\mathrm{parameters} = [\mathrm{k} = 0.0001])$

$$[k = 0.0001] \tag{9.3}$$

$plots[odeplot](sol, [[t, i(t), color = red], [t, s(t), color = green], [t, 10001 - s(t) - i(t), color = \mathrm{blue}]], 0..30);$



Opgave

1. Argumenter for, at antallet af spredere har maksimum netop når antallet af ignoranter når 5000.
2. Hvor mange hører aldrig rygtet?
3. Giv en fortolkning af tallet k.
4. Tegn SD-diagram for modellen.

9.2 En rov- byttedyr model

Scenarie og differentialligninger

På en ø, hvor der er gulerødder nok, udsættes x kaniner og y ræve. Hvis der ingen ræve var tilstede, ville ændringen i kaninbestanden kunne beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x, \quad a > 0$$

— dvs, en eksponentiel vækst.

Var der ingen kaniner tilstede, ville ændringen i rævebestanden kunne beskrives ved

$$\frac{dy}{dt} = -c \cdot x, \quad c > 0$$

— dvs, rævene vil uddø eksponentielt.

Nu er der heldigvis både kaniner og ræve til stede. Tilstedeværelsen af ræve vil begrænse kaninbestandens vækst og tilstedeværelsen af kaniner vil sikre, at rævene ikke dør af sult. Som model til beskrivelse af denne vekselvirkning opstillede Lotka ogVolterra i 1925 følgende model:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x \cdot y \\ \dfrac{dy}{dt} = -c \cdot y + d \cdot x \cdot y \end{cases}$$

hvor a, b, c og d er positive konstanter.

Opgave

1. Forklar de enkelte led i differentialligningerne, idet $x \cdot y$ i analogi med rygtespredningsmodellen tolkes som det totale antal møder mellem ræve og kaniner.
2. Sæt $a = 0.5, b = 0.03, c = 0.5$ og $d = 0.01$, og antag der fra starten af er 50 kaniner og 10 ræve.
   Indtast differentialligningerne med begyndelsesbetigelser og tegn de to løsningskurver i et passende koordinatsystem.
   Eksperimenter med begyndelsesbetingelserne og værdierne af a, b, c og d.
3. Lav et billede, der har antal kaniner som x-akse og antal ræve som y-akse.

9.3 En epidemi model

Scenarie og differentialligninger

Spedningen af en smitsom sygdom som fx røde hunde, hvor man blive immun for fremtidig smitte så snart man er kommet sig over sygdommen, kan beskrives ved differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -a \cdot r \cdot s \\ \dfrac{ds}{dt} = a \cdot r \cdot s - b \cdot s \end{cases}$$

hvor r er antallet af raske på dag t, og s er antallet af syge på dag t.

Opgave

1. Sammenlign modellen med rygtespredningsmodellen og forklar specielt betydningen af konstanterne a og b.
2. Sæt $a = 0.00002$ og $b = 0.1$, og lad begyndelsesbetingelserne være som i rygtespredningsmodellen. Tegn løsningskurverne. Bliver alle smittet af sygdommen?

10 Chi^2 - test

Læsevejledning til

At træffe sine valg i en usikker verden - eller den statistiske modellerings rolle.

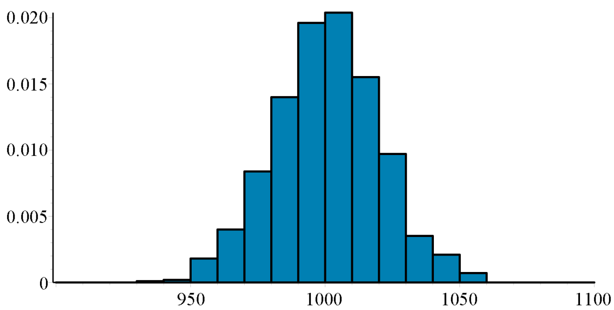
Af Susanne Christensen

10.1 Inden du begynder

Umiddelbart kræver det ikke de store forudsætninger at læse artiklen. Med denne læsevejledning kan du kan blive mere fortrolig med begrebet stokastisk variabel, dens sandsynlighedsfordeling og dens fordelingsfunktion inden du læser artiklen.

Virkeligheden - den virkelige verden

Indholdet af en pose med 1 kg sukker vejer ikke præcist 1 kg - altid lidt mere eller lidt mindre. Laver du en vejning af indholdet af 100 poser med 1 kg sukker (med en præcision på 0.1 gram), vil du få en lang række forskellige resultater. For at danne et overblik, kan du gruppere disse i intervaller af længde 10, udregne intervalfrekvenserne og tegne et histogram. Det kunne se således ud:



Som du har set ovenfor, så kan vægten af indholdet af en pose med 1 kg sukker antage mange forskellige værdier. En værdi mellem 980 g og 1020 g ser ud til at være det mest almindelige, men der forekommer også værdier i intervallet $[950, 960]$ og i $[1050, 1060]$, disse er dog ikke nær så hyppige.

Hvis du vil bestemme hvor mange procent af vejningerne der falder i et bestemt interval - fx $[950, 980]$ - skal du lægge intervalfrekvenserne for de tre intervaller sammen. Dette svarer til at finde *arealet* af de tre stolper over intervallerne $[950, 960]$, $[960, 970]$ og $[970, 980]$.

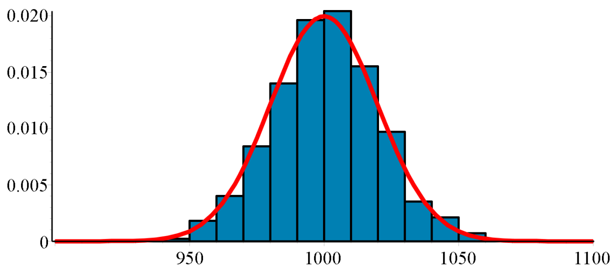
Arealet af alle stolperne i histogrammet er 1 (eller 100%, om du vil)

Modellen - den idealiserede verden

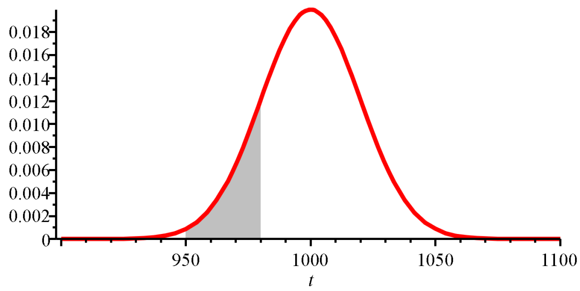
Hvis du øger antallet af poser, du vejer, mindsker intervalbredden og øger din præcision i vejningen, så vil dit histogram efterhånden udjævnes og blive til en *kontinuert* funktion φ.

Dette kræver dog, at antallet af poser, du vejer, er uendelig stor, intervalbredden uendelig lille og præcisionen i vejningen uendelig fin.

Nedenfor ser du denne kontinuerte funktion φ indtegnet sammen med histogrammet:



Hvis du i modellen vil finde den procentdel af observationerne der falder i intervallet $[950, 980]$, så skal du finde arealet af punktmængden, der er begrænset af førsteaksen, grafen for φ og linjerne $x = 950$ og $x = 980$



Så den simple addition af intervalfrekvenser må i modellen erstattes af beregning af integralet:

$$\int_{950}^{980} \varphi(x)\, dx$$

I modellen knytter vi en størrelse X til en vejning:

X = vægten af indholdet af en 1 kg sukkerpose

X kaldes en *stokastisk variabel*. Det betyder, at X kan antage alle mulige værdier, og vi har umiddelbart ingen anelse om hvilken værdi.

På engelsk hedder det 'Random variable', hvor 'random' bedst oversættes til 'tilfældig'. Det er ikke variablen X, der er tilfældig, men den værdi, X antager, er tilfældig.

Formelt set, kan vægten af indholdet af en 1 kg sukkerpose være et vilkårligt reelt tal (og dem er der jo uendeligt mange af), så det giver det ikke mening at spørge om, hvad sandsynligheden er for at X antager en bestemt værdi.

Derimod giver det god mening at spørge om, hvad sandsynligheden er for at X antager en værdi, der er mindre end eller lig med fx 980. Skulle du give et svar på baggrund af histogrammet i 'den virkelige verden', så ville du finde den kummulerede frekvens for 980 ved at lægge intervalfrekvenser sammen - eller med andre ord, finde arealet af stolperne i histogrammet der ligger før 980.

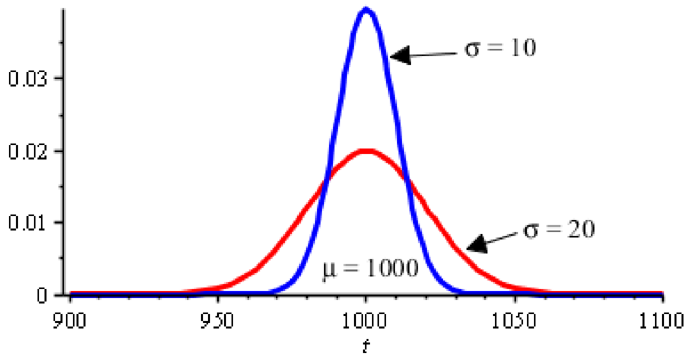
I modellen svarer dette til at bestemme integralet (arealet):

$$\int_{-\infty}^{980} \varphi(x)\, dx$$

Funktionen φ kaldes for *sandsynlighedsfordelingen* for X.

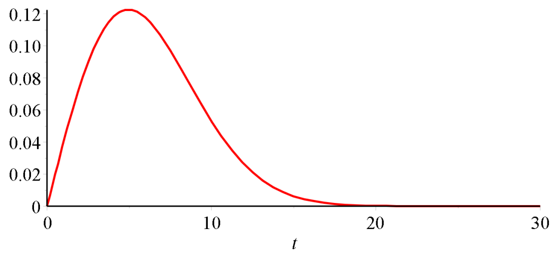
Sandsynlighedsfordelingen (tæthedsfunktionen)

Der skal to parametre til at beskrive en klokkekurve som φ: Den ene er symmetriaksen (middelværdien μ), og den anden fastlægger 'bredden' (spredningen σ).



Hvis en stokastisk variabel X følger denne fordeling, så siges X at være normalfordelt med middelværdi μ og spredning σ. Kort skrives det således $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Der findes mange andre sandsynlighedsfordelinger end normalfordelingen. Fx denne (Weibull fordeling):



der bestemt ikke er normalfordelt. Konkret viser denne fordelingen af vindhastigheder på en bestemt lokalitet. Af fordelingen fremgår, at middelvindhastigheden er omkring 7, at der af og til er næsten vindstille og ganske sjældent vindhastigheder over 15 m/s.

I princippet kan alle ikke-negative funktioner bruges som en sandsynlighedsfordeling, hvis blot den opfylder, at $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ - eller med andre ord, at 'summen af alle sandsynligheder er 1'.

Tænk på en sandsynlighedsfordeling således:

Du har 1 liter sandsynlighedsmaling, du skal smøre ud på x-aksen. Sandsynlighedsfordelingen viser så, hvor og hvor tykt et lag, du har smurt på.

Af denne grund kaldes sandsynlighedsfordelingen ofte for *tæthedsfunktionen*

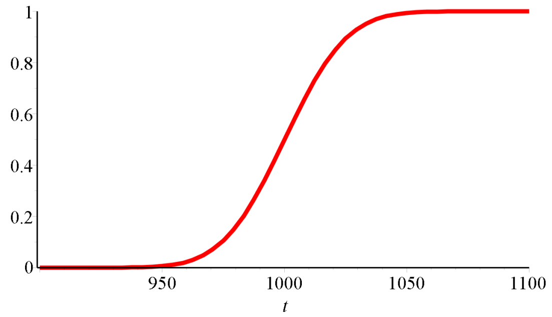
Fordelingsfunktion

Svarende til, at du i forbindelse med et grupperet observationssæt kan tegne en sumkurve på basis af de kummulerede intervalfrekvenser (husk, at det er arealer af søjler i histogrammet), kan du i modellen tegne *arealfunktionen F* for sandsynlighedsfordelingen *f*.

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Husk, at når du bestemmer arealer under sandsynlighedsfordelingen, så er det faktisk intervalsandsynligheder du finder. Her sandsynligheden for at få en værdi i intervallet $]-\infty, t]$. Dette kan også udtrykkes som sandsynligheden for at X antager en værdi mindre end eller lig med t - kort $P(X \le t)$.

For sandsynlighedsfordelingen φ hørende til $X \sim N(1000, 20)$ ser grafen for F således ud:



Funktionen F kaldes *fordelingsfunktionen* for f.

Oversigt over begreber i model og virkelighed

Virkelighed	**Model**
Observerede data	Værdier af en stokastisk variabel
Intervalfrekvens	Intervalsandsynlighed
Gennemsnit	Middelværdi
Histogram	Sandsynlighedsfordeling (graf) tæthedsfunktion
Sumkurve	Fordelingsfunktion (graf)

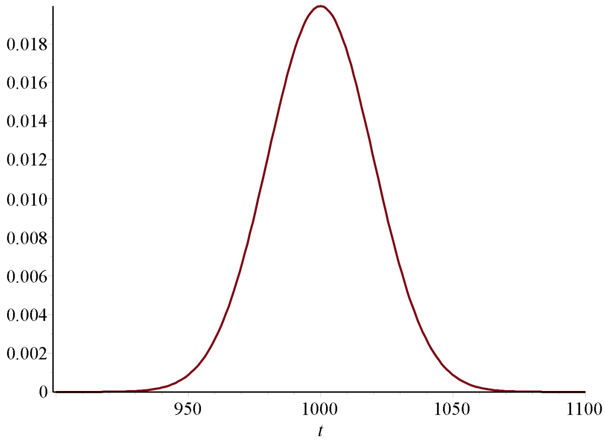
Sådan fungerer det i Gym-pakken

$with(Gym)$:

Sandsynlighedsfordelingen for normalfordelt stokastisk variabel er indbygget i Gym-pakken. Den hedder *normalpfd* (pdf står for 'probability density function', hvor density betyder tæthed.

Hvis du skal tegne sandsynlighedsfordelingen for stokastisk variabel X med middelværdi 1000 og spredning 20:

$plot(normalpdf(1000, 20, t), t = 900..1100)$



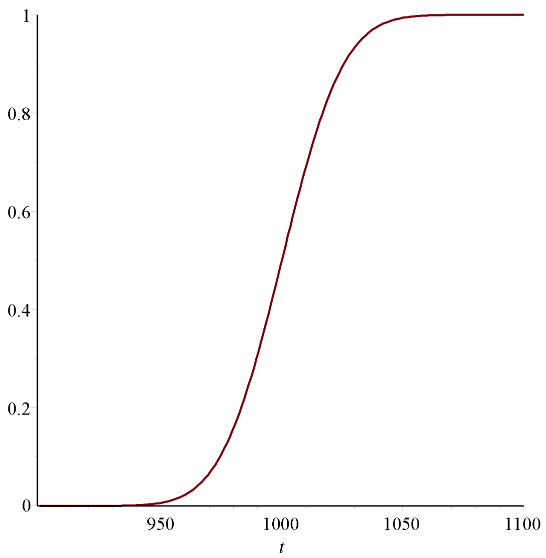
Hvis du vil bestemme sandsynligheden for, at X antager en værdi i intervallet $[950, 980]$, udregner du dette integral:

$$\int_{950}^{980} normalpdf(1000, 20, t)\, dt = 0.1524455885$$

Dvs., at sandsynligheden for at havne i dette interval er ca 0.15.

Fordelingsfunktionen er også i Gym-pakken. Den hedder *nomalcdf* (cummulative cistribution function):

$plot(normalcdf(1000, 20, t), t = 900..1100)$



Hvis fx X er knyttet til vejning af sukkerposer, så betyder

$normalcdf(1000, 20, 1020) = 0.8413447460$

at 84% af alle sukkerposer vejer højst 1020 g.

Hvis du skal bestemme, hvor meget de 25% tungeste poser vejer, så svarer dette til at løse ligningen $normal(1000, 20, t) = 0.75$. Det klares let og elegant med funtionen *invnorm* :

$invnorm(1000, 20, 0.75) = 1013.48979500393$

Det betyder, at de tungeste 25% vejer over 1013.5 g.

Bemærkning:

I princippet kan du løse ligningen $normal(1000, 20, t) = 0.75$ direkte, men det er ikke problemfrit. Det kan ikke anbefales at prøve med solve, idet det lkan tage en frygteligt tid at finde en løsning - og ofte er det aldeles ulæseligt

fsolve vil heller ikke altid virke her, da den render galt i byen - med mindre rutinen udstyres med en passende startværdi (eller et søgeinterval):

$fsolve(normalcdf(1000, 20, t) = 0.75, t = 1000)$

$$1013.489795 \tag{10.1}$$

Sådan fungerer det med stokastiske variable (Avanceret)

$with(Statistics)$:

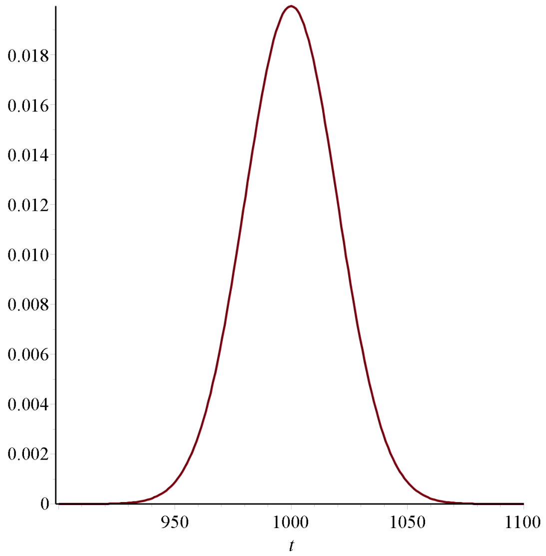
Start med at definere en stokastisk variabel X med middelværdi 1000 og spredning 20:

$X := RandomVariable(Normal(1000, 20))$

$$\_R13 \tag{10.2}$$

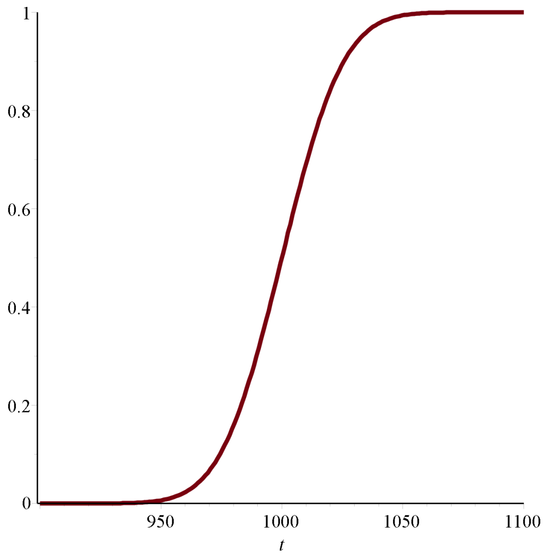
Med denne definition har den automatisk defineret tæthedsfunktionen under navnet $PDF(X, t)$ Grafen tegnes sådan:

$plot(PDF(X, t), t = 900..1100)$



Fordelingsfunktionen har du også direkte adgang til. Den hedder CDF:

$plot(CDF(X, t), t = 900..1100, thickness = 3)$



Hvis fx X er knyttet til vejning af sukkerposer, så betyder

$$CDF(X, 1020) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.84134$$

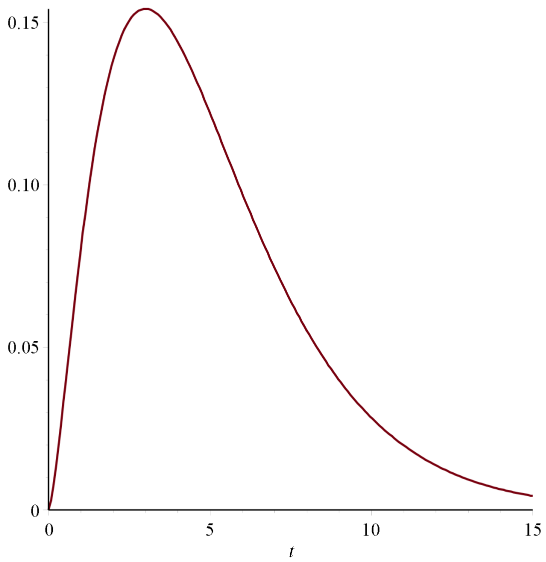
at 84% af alle sukkerposer vejer højst 1020 g.

Chi^2 - fordelingen

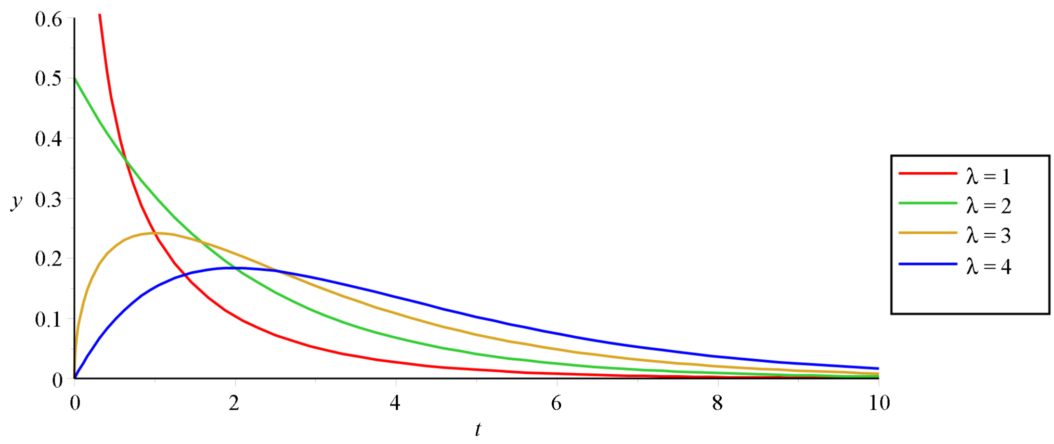
$with(Gym)$:

Tæthedsfunktionen (sandsynlighedsfordelingssfunktionen) for en χ^2 fordeling styres af én parameter λ - kaldet antallet af frihedsgrader. Med $\lambda = 5$ ser det sådan ud

$plot(chipdf(5, t), t = 0..15)$



For andre frihedsgrader ser χ^2 fordelingen sådan ud



Arbejdet med χ^2 fordelingen, herunder bestemmelse af sandsynligheder, foregår vha. integraler præcis som ved normalfordelingen.

10.2 Statistisk test for uafhængighed mellem to inddelingskriterier 1 (side 2 - 7)

Eksempel 1

$with(Gym)$:

Tast data for de to kategorier ind i en lister:

$Kvinder := [98, 102] = [98, 102]$

$Mænd := [60, 100] = [60, 100]$

- og saml til en tabel (eller matrix):

$$obs := Matrix([Kvinder, Mænd]) = \begin{bmatrix} 98 & 102 \\ 60 & 100 \end{bmatrix}$$

Vi tester hypotesen

H_0 : Der er uafhængighed mellem de to inddelingskriterier

mod alternativet

H_0 : Der er ikke uafhængighed mellem de to inddelingskriterier

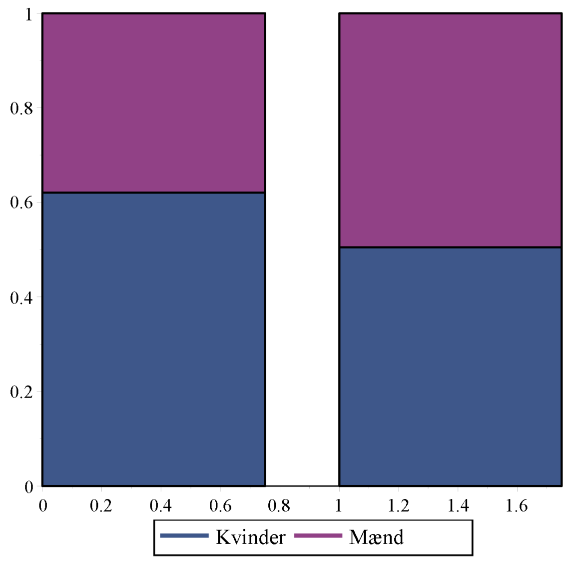
De forventede værdier under hypotesen H_0 udregnes

$$forv := forventet(obs) = \begin{bmatrix} 87.778 & 112.22 \\ 70.222 & 89.778 \end{bmatrix}$$

Stakkede søjlediagrammer tegnes:

$with(Statistics)$:

$ColumnGraph([Kvinder, Mænd], legend = ["Kvinder", "Mænd"], scale = relative, format = stacked)$



χ^2-teststørrelsen skal beregnes. Her kan du bestemme de enkelte cellers bidrag med

$$bidrag(obs) = \begin{bmatrix} 1.190436005 & 0.9311331094 \\ 1.488045006 & 1.163916391 \end{bmatrix}$$

- og vil du have rækker og søjler summeret, så gør du således:

$$tabelsum(bidrag(obs)) = \begin{bmatrix} 1.190436005 & 0.9311331094 & 2.121569114 \\ 1.488045006 & 1.163916391 & 2.651961397 \\ 2.678481011 & 2.095049500 & 4.773530511 \end{bmatrix}$$

I nederste højre celle kan du se, at χ^2-teststørrelsen, Q, her er

$Q := 4.773530511 = 4.773530511$

Indtastning i en antalstabel

Du kan vælge at indtast dine observationer i en antalstabel med række- og søjlelabels samt række- og søjlesummer. Der **skal** stå "Observeret" i den øverste celle:

$$A := \begin{bmatrix} \text{"Observeret"} & \text{"Lavt"} & \text{"Højt"} & \text{"I alt"} \\ \text{"Kvinder"} & 98 & 102 & 200 \\ \text{"Mænd"} & 60 & 100 & 160 \\ \text{"I alt"} & 158 & 202 & 360 \end{bmatrix} :$$

Du kan bruge denne matrix som input til *forventet* funktionen

$$F := forventet(A) = \begin{bmatrix} \text{"Forventet"} & \text{"Lavt"} & \text{"Højt"} & \text{"I alt"} \\ \text{"Kvinder"} & 87.778 & 112.22 & 200 \\ \text{"Mænd"} & 70.222 & 89.778 & 160 \\ \text{"I alt"} & 158 & 202 & 360 \end{bmatrix}$$

Og bidragene til χ^2-teststørrelsen findes ved

$bidrag(A)$

$$\begin{bmatrix} \text{"Bidrag"} & \text{"Lavt"} & \text{"Højt"} & \text{"I alt"} \\ \text{"Kvinder"} & 1.190436005 & 0.9311331094 & 2.121569114 \\ \text{"Mænd"} & 1.488045006 & 1.163916391 & 2.651961397 \\ \text{"I alt"} & 2.678481011 & 2.095049500 & 4.773530511 \end{bmatrix} \tag{10.3}$$

En generel rutine til beregning af χ^2-teststørrelsen har du her. Den følger helt formlen i artiklen (side 5)

$m, n := LinearAlgebra[Dimension](obs) :$

$$Q := add\left(add\left(\frac{\left(obs_{i,j} - forv_{i,j}\right)^2}{forv_{i,j}}, i = 1..m\right), j = 1..n\right)$$

$$4.772975907 \tag{10.4}$$

Teststørrelsen Q er χ^2-fordelt med 1 frihedsgrad

Hypotesen må forkastes, hvis værdien af Q er stor. Da $Q \geq 0$ betyder det, at en χ^2-test altid vil være højresidet.

Du kan tænke således på frihedsgrader:

Hvis du selv skulle fylde tabellen ud med observerede værdier (uden at skulle spørge 200 kvinder og 160 mænd) og det skal se rimeligt ud (ingen negative værdier i tabellen), så er du bundet af, at både række og søjlesummerne skal passe.

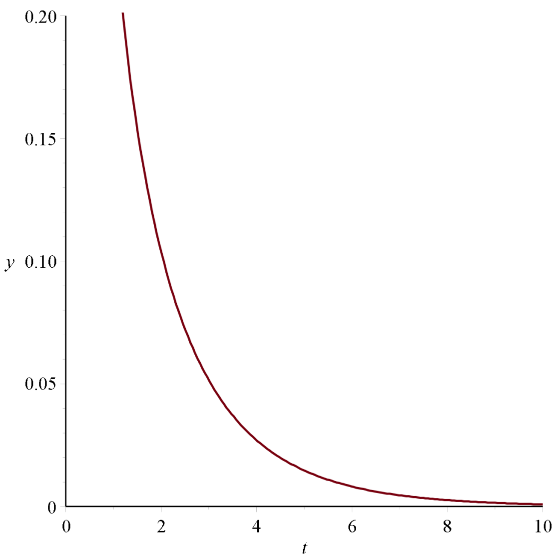
		200
		160
158	202	360

Sætter du x ind i det øverste felt, så kan du udtrykke alle øvrige celler vha. dette x. Den ene frihedsgrad betyder, at du kan vælge indholdet af én celle frit - de øvrige cellers indhold er da bestemt ved dit valg og bindingerne.

x	$200-x$	200
$158-x$	$x+2$	160
158	202	360

Vi plotter sandsynlighedsfordelingen for Q er:

$plot(chipdf(1,t), t=0..10, y=0..0.2)$



Test på niveau 5%:

(Nedenfor kan du ændre niveauet til 1%, hvis du vil checke det andet tilfælde der regnes på)

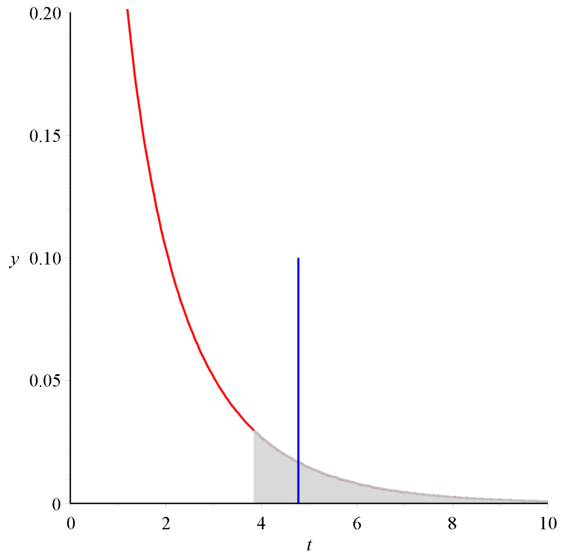
$niveau := 0.05:$

For at finde den kritiske værdi skal vi skal have bestemt 5%-halen til højre. Hertil løser vi

$$KritiskVærdi := fsolve\left(\int_{k}^{\infty} chipdf(1,t)\, dt = niveau, k\right) = 3.841458820$$

En værdi af Q større end 3.84 vil føre til en forkastelse af hypotesen H_0. Q-værdien, beregnet ovenfor, er 4.77, så vi må forkaste hypotesen på niveau 5%.

Nedenfor er 5%-halen skraveret og Q-værdien er indsat. Q-værdien ligger langt inde i det kritiske område



Alternativt kan den kritiske værdi bestemmes som 95%-fraktilen:

$invchi(1, 0.95) = 3.84145606580278$

Bestemmelse af p-værdien (ved niveau 5%)

p-værdien er sandsynligheden for, at teststørrelsen Q faktisk antager værdien 4.77 eller derover. Det kan bestemmes som arealet under kurven ovenfor i intervallet $[4.77, \infty[$:

$$\int_{Q}^{\infty} chipdf(1, t)\, \mathrm{d}t = 0.02890981219$$

Dvs., at der er ca 2.9% sandsynlighed for få et udfald af eksperimentet der er lige så 'skæv' eller 'skævere' end det vi har fået.

Alternativt kan p-værdien udregnes således:

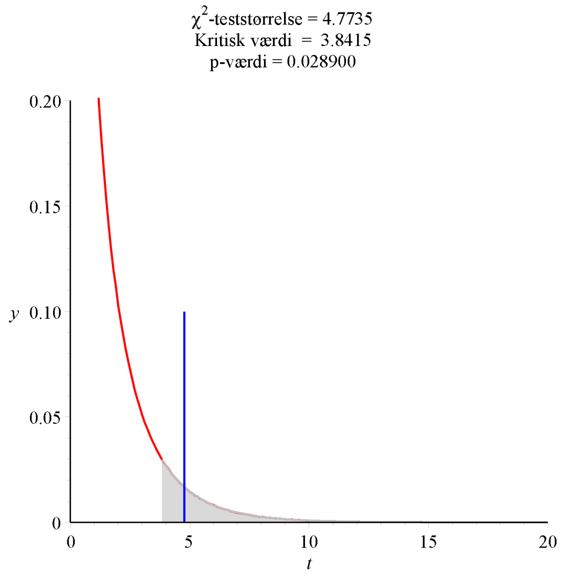
$1 - chicdf(1, Q) = 0.0289097806335710$

Automatisk test for uafhængighed

Gym-pakken indeholder en kommando, der automatiserer test for uafhængighed:

$with(Gym)$:

$ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)$



Værsgo. Her har du det hele.

10.3 Statistisk test for uafhængighed mellem to inddelingskriterier 2 (side 7 - 11)

Flere niveauer på hvert af inddelingskriterierne

restart

$with(Gym)$:

$Lev := [40, 10, 9] = [40, 10, 9]$

$Død := [14, 6, 16] = [14, 6, 16]$

$$obs := Matrix([Lev, Død]) = \begin{bmatrix} 40 & 10 & 9 \\ 14 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

Vi skal her teste hypotesen

H_0 : Der er samme sandsynlighed for overlevelse efter alle tre typer operation

mod alternativet

H_1 : Der er ikke samme sandsynlighed for overlevelse efter alle tre typer operation

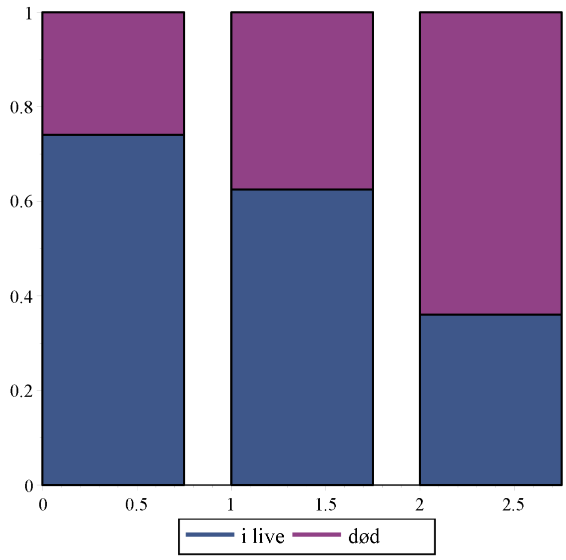
De forventede værdier under hypotesen H_0 udregnes

$forv := forventet(obs)$

$$\begin{bmatrix} 33.537 & 9.9368 & 15.526 \\ 20.463 & 6.0632 & 9.4737 \end{bmatrix} \tag{10.5}$$

Stakkede søjlediagrammer tegnes:

$with(Statistics)$:
$ColumnGraph([Lev, Død], legend = [\text{"i live"}, \text{"død"}], scale = relative, format = stacked)$

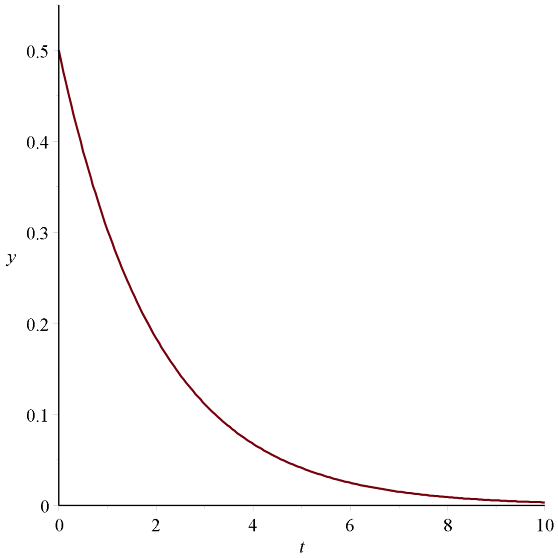


χ^2-teststørrelsen Q udregnes:

$m, n := LinearAlgebra[Dimension](obs)$:
$Q := add\left(add\left(\frac{\left(obs_{i,j} - forv_{i,j}\right)^2}{forv_{i,j}}, i = 1 ..m\right), j = 1 ..n\right)$

$$10.52675744 \tag{10.6}$$

Teststørrelsen Q er χ^2-fordelt med 2 frihedsgrader. Sandsynlighedsfordelingen ser sådan ud:
$plot(chipdf(2, t), t = 0..10, y = 0..0.55)$



Test på niveau 5%:

Nedenfor kan du ændre niveauet til 1%, hvis du vil checke det andet tilfælde der regnes på)

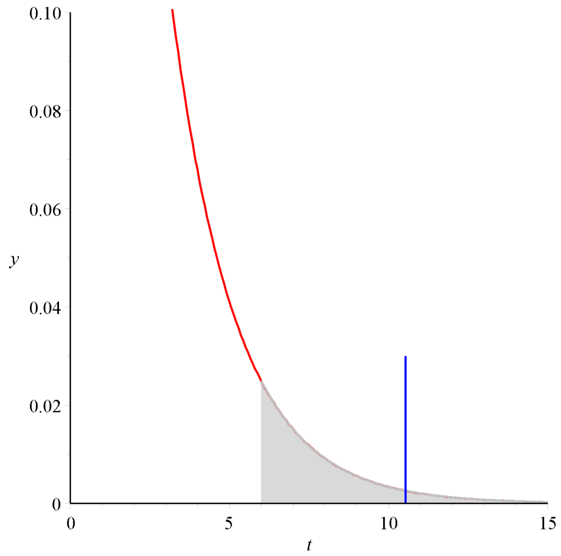
$niveau := 0.05$:

For at finde den kritiske værdi skal vi skal have bestemt 5%-halen til højre. Hertil løser vi

$$KritiskVærdi := fsolve\left(\int_{k}^{\infty} chipdf(2, t)\, \mathrm{d}t = niveau, k\right) = 5.991464547$$

En værdi af Q større end 5.99 vil føre til en forkastelse af hypotesen H_0. Q-værdien, beregnet ovenfor, er 10.5, så vi må forkaste hypotesen på niveau 5%.

Nedenfor er 5%-halen skraveret og Q-værdien er indsat. Q-værdien ligger langt inde i det kritiske område:



Bestemmelse af p-værdien (ved niveau 5%)

p-værdien er sandsynligheden for teststørrelsen Q faktisk antager værdien 10.5 eller derover. Det kan bestemmes som arealet under kurven ovenfor i intervallet $[10.5, \infty[$:

$$\int_{Q}^{\infty} chipdf(2, t)\, \mathrm{d}t = 0.005176775872$$

Dvs., at der er ca 0.5% sandsynlighed for at få et udfald af eksperimentet der er lige så 'skæv' eller skævere end det vi har fået.

Bemærkning:

Den kritiske værdi kan også bestemmes således:

$$invchi(2, 0.95) = 5.99146454710798$$

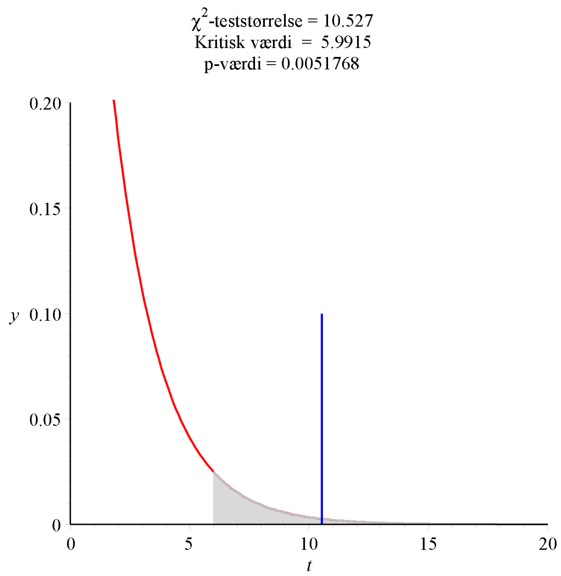
og p-værdien sådan her:

$$1 - chicdf(2, Q) = 0.00517677587213661$$

Automatisk test for uafhængighed

$with(Gym)$:

$ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)$



10.4 Statistisk test for uafhængighed mellem to inddelingskriterier 3 (side 10)

Test for uafhængighed mellem overlevelse og operationsform for aldersgruppen over 50

$with(Gym)$:

$Lev := [13, 8, 8] = [13, 8, 8]$

$Død := [13, 6, 16] = [13, 6, 16]$

$$obs := Matrix([Lev, Død]) = \begin{bmatrix} 13 & 8 & 8 \\ 13 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

For aldersgruppen over 50 tester vi hypotesen

H_0 : Der er samme sandsynlighed for overlevelse efter alle tre typer operation

mod alternativet

H_1 : Der er ikke samme sandsynlighed for overlevelse efter alle tre typer operation

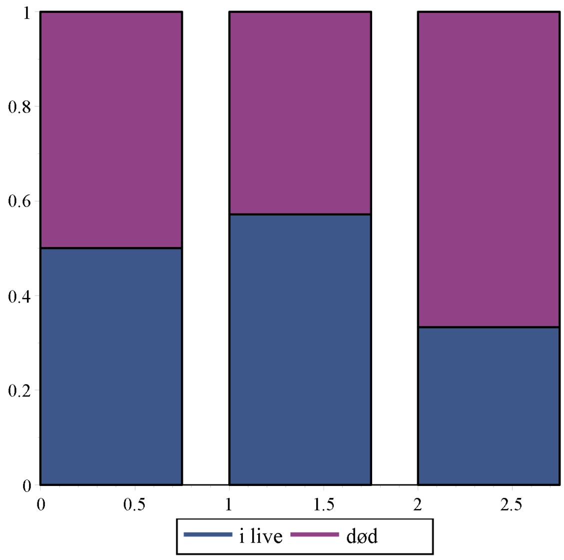
De forventede værdier under hypotesen H_0 udregnes

$$forv := forventet(obs) = \begin{bmatrix} 11.781 & 6.3438 & 10.875 \\ 14.219 & 7.6562 & 13.125 \end{bmatrix}$$

Stakkede søjlediagrammer tegnes:

$with(Statistics)$:

$ColumnGraph([Lev, Død], legend = [\text{"i live"}, \text{"død"}], scale = relative, format = stacked)$



χ^2-teststørrelsen udregnes:

$m, n := LinearAlgebra[Dimension](obs)$:

$$Q := add\left(add\left(\frac{\left(obs_{i,j} - forv_{i,j}\right)^2}{forv_{i,j}}, i = 1..m \right), j = 1..n \right)$$

$$2.411118636 \tag{10.7}$$

Teststørrelsen Q er χ^2-fordelt med 2 frihedsgrader

(10.8)

Test på niveau 5%:

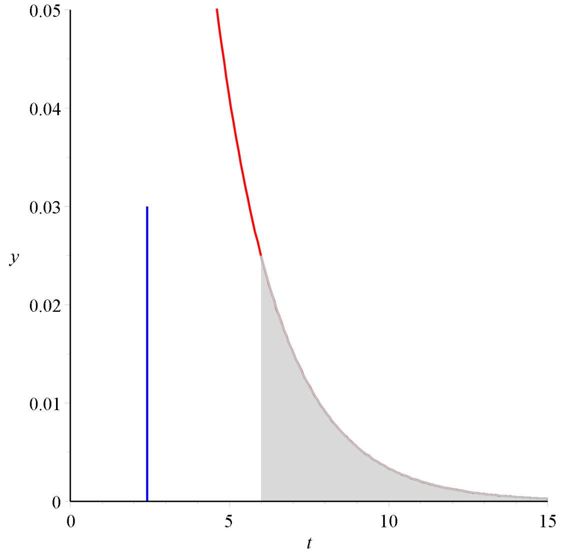
$niveau := 0.05$:

For at finde den kritiske værdi skal vi skal have bestemt 5%-halen til højre. Hertil løser vi

$$KritiskVærdi := fsolve\left(\int_k^\infty chipdf(2, t)\, dt = niveau, k \right) = 5.991464547$$

En værdi af Q større end 5.99 vil føre til en forkastelse af hypotesen H_0. Q-værdien, beregnet ovenfor, er 2.41, så vi må acceptere hypotesen på niveau 5%.

Nedenfor er 5%-halen skraveret og Q-værdien er indsat. Q-værdien ligger langt inde i acceptområdet:



Bestemmelse af p-værdien (ved niveau 5%)

p-værdien er sandsynligheden for teststørrelsen Q faktisk antager værdien 10.5 eller derover. Det kan bestemmes som arealet under kurven ovenfor i intervallet $[10.5, \infty[$:

$$\int_{Q}^{\infty} chipdf(2, t)\,\mathrm{d}t = 0.2995244233$$

Dvs., at der er ca 0.5% sandsynlighed for at forkaste en sand hypotese.

Bemærkning:

Den kritiske værdi kan bestemmes således:

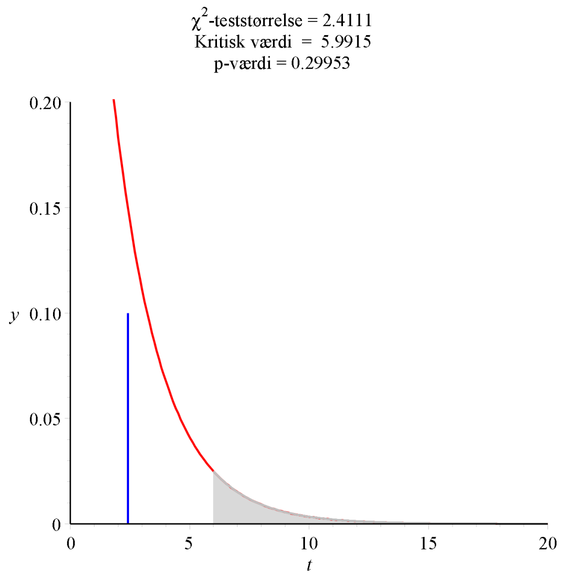
$invchi(2, 0.95) = 5.99146454710798$

og p-værdien sådan her:

$1 - chicdf(2, Q) = 0.299524424931276$

Automatisk test for uafhængighed

$ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)$



10.5 Test for godness of fit (side 12-14)

restart

$with(Gym)$:

Observerede data indtastes i en liste:

$obs := [98, 88, 199, 136, 210, 179, 52, 38]$

$$[98, 88, 199, 136, 210, 179, 52, 38] \quad (10.9)$$

Vi skal her teste hypotesen

H_0 : Indkomstfordelingen i stikprøven adskiller sig ikke signifikant fra indkomstfordelingen i popula-tionen.

H_1 : Indkomstfordelingen i stikprøven er signifikant anderledes end indkomstfordelingen i popula-tionen.

De forventede data under forudsærning af H_0 er procenterne fra Danmarks Statistik ganget med 1000:
$forv := [0.064, 0.093, 0.178, 0.123, 0.243, 0.180, 0.066, 0.053]\cdot 1000$

$$[64.000, 93.000, 178.000, 123.000, 243.000, 180.000, 66.000, 53.000] \quad (10.10)$$

χ^2-teststørrelsen udregnes (nops finder antallet af elementer i listen)

$n := nops(obs)$:
$Q := add\left(\frac{(obs_j - forv_j)^2}{forv_j}, j = 1..n\right)$

$$33.88484606 \quad (10.11)$$

Q er χ^2-fordelt med

$f := n - 1 = 7$

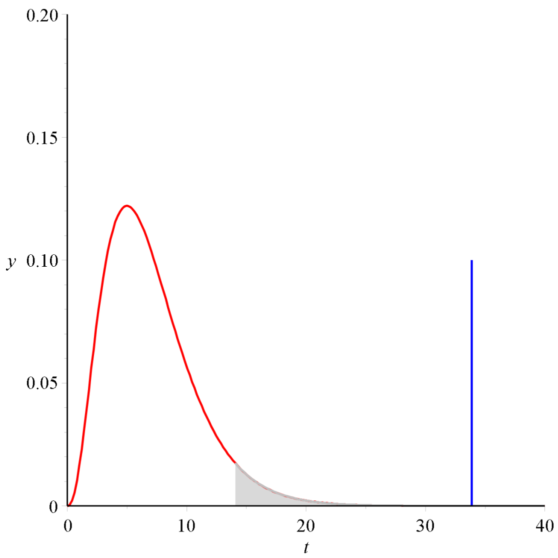
frihedsgrader.

Test på niveau 5%:

$niveau := 0.05$:

$$KritiskVærdi := fsolve\left(\int_k^\infty chipdf(7,t)\,dt = niveau, k\right) = 14.06714045$$

Nedenfor er 5%-halen skraveret og Q-værdien er indsat i sandsynlighedsfordelingen for χ^2-fordelingen med 7 frihedsgrader.



Da Q-værdien ligger langt til højre for den kritiske værdi, må vi forkaste hypotesen.

Bestemmelse af p-værdien (ved niveau 5%)

33.88484606p-værdien er sandsynligheden for teststørrelsen Q faktisk antager værdien 10.5 eller derover. Det kan bestemmes som arealet under kurven ovenfor i intervallet $[Q, \infty[: \int_Q^\infty chipdf(7,t)\,dt = 0.00001810060720$

Bemærkning:

Den kritiske værdi kan bestemmes således:

$invchi(7, 0.95) = 14.0671405764057$

og p-værdien sådan her:

$1 - chicdf(7, Q) = 0.0000181006072422774$

Automatisk test for Goodness of fit

$ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)$